Nakladnik
Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb
Za nakladnika
Ana Maletić

Biblioteka
TEHNIČKA MEHANIKA
Knjiga 8

Urednik
prof. dr. sc. Ivo Alfirević

Recenzenti
prof. dr. sc. Ivo Alfirević,
profesor Sveučilišta u Zagrebu
prof. dr. sc. Nenad Bićanić,
Regius Professor, Univeristy of Glasgow
akademik Ivo Senjanović,
profesor Sveučilišta u Zagrebu

Objavljivanje ovoga sveučilišnog udžbenika odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu odlukom broj 02-421/3-2003. od 8. srpnja 2003. godine

Copyright © 2004., Golden marketing-Tehnička knjiga,
Zagreb, Hrvatska
Sva prava pridržana

ISBN 953-212-210-9

Jurica Sorić

METODA KONAČNIH ELEMENATA

Golden marketing-Tehnička knjiga

SADRŽAJ

PREDGOVOR 9

POPIS OZNAKA 11

1. UVOD 21
1.1. O metodi konačnih elemenata 21
1.2. Razvoj metode konačnih elemenata 23
1.3. Osnovni konačni elementi i pregled primjene 26
1.4. Pregled sadržaja 31

2. OSNOVE MATRIČNOG RAČUNA 35
2.1. Definicija i označivanje matrica 35
2.2. Elementarne operacije s matricama 38
2.2.1. Zbrajanje i oduzimanje matrica 38
2.2.2. Množenje skalarom 39
2.2.3. Množenje matrica 39
2.2.4. Transponiranje matrice 41
2.2.5. Podjela matrice na submatrice 42
2.2.6. Diferenciranje i integriranje matrice 42
2.2.7. Kvadratni oblik matrice 43
2.2.8. Determinanta matrice 44
2.2.9. Inverzna matrica 45
2.2.10. Problem vlastitih vrijednosti 46

3. OSNOVNE JEDNADŽBE TEORIJE ELASTIČNOSTI 49
3.1. Jednadžbe za rješavanje prostornih problema teorije elastičnosti 49
3.1.1. Jednadžbe ravnoteže 49
3.1.2. Veza između deformacije i pomaka. Kinematičke relacije 51
3.1.3. Uvjeti kompatibilnosti 53
3.1.4. Veza između naprezanja i deformacije. Konstitutivne jednadžbe 54
3.1.5. Rubni uvjeti 56
3.1.6. Rješavanje prostornih problema teorije elastičnosti 58

3.2. Ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije 59
3.3. Osnosimetrična tijela opterećena osnosimetrično 61
3.4. Osnovne relacije za analizu štapnih nosača 62
3.4.1. Osno opterećenje štapa 63
3.4.2. Uvijanje štapa 64
3.4.3. Savijanje štapa 65
3.4.4. Složeno opterećeni štap 67
3.5. Ploča opterećena u srednjoj ravnini 68
3.6. Savijanje ploče 72
3.7. Osnovne relacije u teoriji ljusaka 78

VARIJACIJSKI PRINCIPI 91
4.1. Rad vanjskih i unutarnjih sila. Potencijalna energija 91
4.2. Princip virtualnih pomaka 95
4.3. Princip virtualnih sila 96
4.4. Princip minimuma potencijalne energije 97
4.5. Princip minimuma komplementarne potencijalne energije 98
4.6. Prošireni varijacijski principi 99

PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE PROBLEMA MEHANIKE KONTINUUMA 103
5.1. Metoda težinskog reziduala 104
5.2. Rayleigh-Ritzova metoda 110

DIREKTNA FORMULACIJA KONAČNIH ELEMENATA 115
6.1. Osnovni štapni element 116
6.2. Osnovni trokutni element 120
6.3. Izračunavanje globalne matrice krutosti 129

FORMULACIJA KONAČNIH ELEMENATA POMOĆU METODE TEŽINSKOG REZIDUALA 135
7.1. Osnovni štapni element 136
7.2. Jednadžba trodimenzijskog elementa 139
7.3. Uvijanje štapa neokruglog presjeka 140
7.3.1. Jednadžba konačnog elementa za rješavanje problema uvijanja 140
7.3.2. Osnovni trokutni element za rješavanje problema uvijanja 143

VARIJACIJSKA FORMULACIJA METODE KONAČNIH ELEMENATA 151
8.1. Jednadžba trodimenzijskog elementa 151
8.2. Globalna formulacija metode konačnih elemenata 156
8.2.1. Transformacija vektora stupnjeva slobode 156

8.2.2. Transformacija vektora sila i matrice krutosti 158
8.2.3. Metoda direktne superpozicije 159
8.2.4. Zadavanje rubnih uvjeta 168
8.2.5. Izračunavanje naprezanja 169

9. KONVERGENCIJA RJEŠENJA I OPIS RAČUNALNOG PROGRAMA 171
9.1. Uvjeti konvergencije 171
9.2. Opis programa za računanje metodom konačnih elemenata 178

10. PRIRODNE KOORDINATE 183
10.1. Jednodimenzijski problemi 183
10.2. Dvodimenzijski problemi 185
10.3. Trodimenzijski problemi 190

11. INTERPOLACIJSKI POLINOMI 197
11.1. Lagrangeovi interpolacijski polinomi 197
11.2. Hermiteovi interpolacijski polinomi 200

12. JEDNODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI 205
12.1. Osnovni štapni element 205
12.2. Štapni element opterećen na uvijanje 213
12.3. Osnovni gredni element 214
12.4. Jednodimenzijski elementi višeg reda 227
12.4.1. Štapni elementi višeg reda 227
12.4.2. Gredni elementi višeg reda 231

13. KONAČNI ELEMENTI ZA DVODIMENZIJSKU ANALIZU 233
13.1. Osnovni trokutni element 233
13.2. Trokutni elementi višeg reda 245
13.3. Osnovni pravokutni element 251
13.4. Pravokutni elementi višeg reda 257
13.4.1. Primjena Lagrangeovih interpolacijskih polinoma 257
13.4.2. Serendipity elementi 263

14. KONAČNI ELEMENTI ZA TRODIMENZIJSKU ANALIZU 273
14.1. Prostorni gredni element 274
14.2. Osnovni tetraedarski element 276
14.3. Tetraedarski elementi višeg reda 280
14.4. Osnovni prizmatični elementi 284
14.5. Prizmatični elementi višeg reda 288
14.5.1. Primjena Lagrangeovih interpolacijskih polinoma 288
14.5.2. Serendipity elementi 291

15. OSNOSIMETRIČNI KONAČNI ELEMENTI 299
15.1. Rješavanje problema osnosimetrične deformacije 299
15.2. Proizvoljno opterećenje osnosimetričnih elemenata 306

16. IZOPARAMETARSKI KONAČNI ELEMENTI 315
16.1. Dvodimenzijski elementi 316
16.1.1. Četverokutni elementi 316
16.1.2. Trokutni elementi 325
16.2. Trodimenzijski elementi 331
16.2.1. Elementi u obliku heksaedra i distordirane trokutne prizme 331
16.2.2. Tetraedarski elementi 336
16.3. Konvergencija izoparametarskih elemenata 340
16.4. Numerička integracija 343

17. KONAČNI ELEMENTI ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA SAVIJANJA PLOČA 353
17.1. Pravokutni konačni elementi 354
17.1.1. Pravokutni nekonformni element s 12 stupnjeva slobode 354
17.1.2. Pravokutni konformni element sa 16 stupnjeva slobode 359
17.2. Trokutni konačni elementi 361
17.2.1. Trokutni nekonformni elementi 361
17.2.2. Trokutni konformni elementi 364
17.3. Analiza konvergencije rješenja 369

18. KONAČNI ELEMENTI ZA ANALIZU LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA 373
18.1. Ravni elementi za analizu ljuskastih konstrukcija 374
18.2. Elementi za analizu osnosimetričnih ljusaka 381
18.3. Dvostruko zakrivljeni ljuskasti elementi 391
18.3.1. Zakrivljeni elementi temeljeni na teoriji ljusaka 391
18.3.2. Degenerirani ljuskasti elementi 404

19. O OSTALIM FORMULACIJAMA METODE KONAČNIH ELEMENATA 417
19.1. Mješovita formulacija 418
19.2. Hibridna metoda sila 423

Literatura 429

Kazalo pojmova 435

O autoru 441

PREDGOVOR

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima. Danas postoji velik broj računalnih programa temeljenih na toj metodi, koji omogućuju analizu konstrukcija bez razmatranja složene teorije koja opisuje fizikalno ponašanje konstrukcije. Njihovo korištenje nerijetko se svodi na zadavanje ulaznih podataka prema propisanim uputama, a dobivena rješenja, koja svojim grafičkim prikazom često fasciniraju korisnike, prihvaćaju se bez dovoljno kritičnosti. Računalni program shvaća se kao crna kutija (Black-Box) u kojoj je skrivena složena teorija koja se smatra nepotrebnom za rješavanje inženjerskih problema. Takav pristup može dovesti do pogrešne procjene stanja naprezanja i deformacije u konstrukciji, a to može ugroziti njezinu čvrstoću i stabilnost.

Metoda konačnih elemenata približna je numerička metoda. Svaki njezin korisnik treba imati na umu da su dobivena rješenja približna, a realnim vrijednostima mogu se približiti samo uz pravilan izbor proračunskog modela i uz pravilno odabrane konačne elemente koji su u mogućnosti opisati realni proces deformiranja. Kako bi to bilo moguće, potrebno je razumjeti fizikalno ponašanje konstrukcije koja se analizira te poznavati teorijske osnove konačnih elemenata, a na taj način i ograničenja njihove primjene. Osim toga, korisnik mora biti u stanju kritički analizirati dobivene rezultate.

Namjera je ovoga udžbenika upoznati čitatelja s teorijskim osnovama metode konačnih elemenata za rješavanje linearnih statičkih problema mehanike deformabilnih tijela te s formulacijama različitih konačnih elemenata koji se najčešće primjenjuju u proračunima konstrukcija. Čitatelju koji razumije fizikalno ponašanje konstrukcije udžbenik bi trebao pomoći u pravilnom izboru konačnih elemenata u proračunskom modelu i na taj način pridonijeti procjeni valjanosti dobivenih rješenja. Za lakše čitanje i razumijevanje ovoga udžbenika poželjno je poznavanje osnova teorije elastičnosti i mehanike deformabilnih tijela, što je također neophodno za razumijevanje procesa deformiranja koji se modelira. Udžbenik je namijenjen ponajprije studentima dodiplomskih i poslijediplomskih studija na tehničkim fakultetima, kao što su strojarstvo, brodogradnja, zrako-

plovstvo i građevinarstvo. Također, vrlo dobro može poslužiti inženjerima u praksi koji se služe opisanom numeričkom metodom, kao i svima koji ju žele rabiti i naučiti. Osim korisnicima računalnih programa, udžbenik će pomoći i čitateljima koji žele razvijati nove konačne elemente. Izrada programskih algoritama i razvoj računalnih programa izostavljeni su, a organizacija računalnog programa samo je ukratko opisana u 9. poglavlju.

Oblikovanju sadržaja ovoga udžbenika uvelike su pridonijela moja gostovanja u Institutu za statiku i dinamiku Sveučilišta Ruhr u Bochumu, gdje sam tijekom dugogodišnje suradnje s profesorom Wilfriedom Krätzigom uvijek nadopunjavao svoja znanja o metodi konačnih elemenata, posebno o složenijim formulacijama elemenata za analizu ljuskastih konstrukcija, na čemu mu najtoplije zahvaljujem. Na sadržaj udžbenika utjecalo je i moje nastavno iskustvo iz kolegija *Osnove metode konačnih elemenata* i *Metoda konačnih elemenata* na Studiju strojarstva te *Numeričke metode u zrakoplovstvu I* na Studiju zrakoplovstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Ugodna mi je dužnost zahvaliti akademiku Stjepanu Jeciću koji mi je 1990. godine prepustio kolegij *Osnove metode konačnih elemenata*. Zahvaljujem svim studentima koji su svojim diskusijama i primjedbama na predavanju i tijekom izrade programskih i diplomskih zadataka pridonijeli da se sadržaj i način izlaganja teorije konačnih elemenata prilagodi lakšem razumijevanju i učenju. Veliku zahvalnost također dugujem znanstvenim novacima Tomislavu Jarku, Igoru Karšaju i Ivici Skozriću, koji su mi pomagali pri izradi slika, tablica i rješavanju primjera.

Posebno zahvaljujem recenzentima, profesorima Ivi Alfireviću i Nenadu Bićaniću te akademiku Ivi Senjanoviću, koji su me upozorili na pogreške, dali mnoge korisne primjedbe te na taj način pridonijeli poboljšanju udžbenika. Osim recenzentima, zahvaljujem i docentu Zdenku Tonkoviću koji je pročitao rukopis i također mi dao korisne primjedbe.

S tugom zahvaljujem Gorjani Alfirević, dipl. ing. arh. koja je započela izradu slika. Nažalost, nije ih uspjela dovršiti jer nas je prerano napustila. Slike je dovršio g. Mario Lesar koji je pokazao veliku strpljivost u suradnji te mnogo pridonio preglednosti i kvaliteti udžbenika, na čemu sam mu iznimno zahvalan. Zahvalnost dugujem i tajnicama u Zavodu za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, gospođama Begzadi Pinjić i Jasminki Biondić, koje su mi pomagale pri prijepisu teksta.

Na kraju zahvaljujem i izdavačkoj kući Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, i njezinim suradnicima, koja je tiskala i grafički opremila ovaj udžbenik. Zahvaljujem svima koji su pridonijeli nastajanju ovoga udžbenika, a nisu ovdje spomenuti.

Zagreb, veljača 2004. *Jurica Sorić*

POPIS OZNAKA

$\mathbf{A}$	linearni diferencijalni operator, matrica međusobne ovisnosti naprezanja i čvornih sila
$\mathbf{A}^T$	transponirana matrica
$\mathbf{A}^{-1}$	inverzna matrica
$\mathbf{A}_{\text{adj}}$	adjungirana matrica
$\lvert\mathbf{A}\rvert$	determinanta matrice
A	površina poprečnog presjeka, površina konačnog elementa
A_1, A_2	Laméovi parametri
$\mathbf{a}$	matrica koeficijenata u interpolacijskim polinomima
$\mathbf{a}_g$	kinematička matrica transformacije
$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$	osnovni vektori na srednjoj plohi ljuske
a_i	koeficijenti interpolacijskih polinoma
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{ny}, a_{nz}	kosinusi smjera u Kartezijevu koordinatnom sustavu
a_{11}, a_{12}, a_{22}	skalarni umnošci osnovnih vektora na srednjoj plohi ljuske
$\mathbf{B}$	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima, operator rubnih veličina
$\mathbf{B}_n^a$, $\mathbf{B}_n^s$	matrice $\mathbf{B}$ za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{C}$	matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma

C_q	duljina ruba na kojem djeluje zadano opterećenje
$\mathbf{c}$	matrica prigušenja konačnog elementa
$\mathbf{D}$, $\overline{\mathbf{D}}$	matrice elastičnosti
$\mathbf{D}_c$	diferencijalni operator uvjeta kompatibilnosti
$\mathbf{D}_e$	diferencijalni operator uvjeta ravnoteže
$\mathbf{D}_k$	kinematički diferencijalni operator
$\mathbf{D}_m$, $\mathbf{D}_f$	submatrice u matrici elastičnosti ljuskastoga kontinuuma
$\det \mathbf{A}$	determinanta matrice
dA, dS	elementarne površine
$\mathbf{E}$	matrica u formulaciji hibridne metode sila
E	Youngov modul elastičnosti
$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$	jedinični vektori u pravcu Kartezijevih koordinata x, y, z
$\overline{\mathbf{e}}_x$, $\overline{\mathbf{e}}_y$, $\overline{\mathbf{e}}_z$	jedinični vektori u pravcu lokalnih Kartezijevih koordinata $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$
$\mathbf{e}_{i1}$, $\mathbf{e}_{i2}$, $\mathbf{e}_{i3}$	jedinični vektori u i-tom čvoru degeneriranoga ljuskastog elementa
$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_n$	jedinični vektori na srednjoj plohi ljuske
$\mathbf{F}$	vektor koncentriranih sila u čvorovima konačnog elementa
$\mathbf{F}_m$, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}_{Mz}$	subvektori u vektoru sila ravnoga ljuskastog elementa
$\mathbf{F}_S$	vektor čvornih sila poradi vanjskoga površinskog opterećenja
$\mathbf{F}_{Sn}^a$, $\mathbf{F}_{Sn}^s$	vektor čvornih sila $\mathbf{F}_S$ za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{F}_V$	vektor čvornih sila poradi vanjskih volumenskih sila
$\mathbf{F}_{Vn}^a$, $\mathbf{F}_{Vn}^s$	vektor čvornih sila $\mathbf{F}_V$ za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{F}_{\varepsilon 0}$	vektor čvornih sila koje su posljedica početnih deformacija u elementu
F_{bx}, F_{by}, F_{bz}, f_{bx}	zadane rubne sile

F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}	komponente vektora sile u Kartezijevim koordinatama u i-tom čvoru konačnog elementa
F_r, F_z	radijalna i osna komponenta vektora sile u cilindričnom koordinatnom sustavu
$F(\xi)$, $F(\xi,\eta)$, $F(\xi,\eta,\zeta)$	podintegralne funkcije pri opisivanju numeričke integracije
$\mathbf{G}$	matrica u formulaciji hibridne metode sila
G	modul smicanja
$\mathbf{H}$	matrica transformacije u formulaciji konačnog elementa za analizu ploča
H_{ji}^{m}	Hermiteovi interpolacijski polinomi
h	debljina konačnog elementa
$\mathbf{I}$	jedinična matrica
I_T	torzijski moment tromosti
I_y, I_z	osni momenti tromosti
$\mathbf{J}$	Jacobijeva matrica
J_{ij}	članovi Jacobijeve matrice
$\mathbf{K}$	globalna matrica krutosti
$\mathbf{K}_n^a$, $\mathbf{K}_n^s$	globalne matrice krutosti za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$	matrice krutosti konačnog elementa
$\mathbf{k}_n^a$, $\mathbf{k}_n^s$	matrice krutosti konačnog elementa za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{k}_m$, $\mathbf{k}_p$	submatrice u matrici krutosti ravnoga ljuskastog elementa
$\mathbf{k}_{\sigma\sigma}$, $\mathbf{k}_{\sigma u}$	submatrice u jednadžbi konačnog elementa mješovite formulacije
L, ℓ	duljine
L_1, L_2	duljinske koordinate
L_1, L_2, L_3	površinske ili trokutne koordinate

L_1, L_2, L_3, L_4	volumenske ili tetraedarske koordinate
l_i	Lagrangeovi interpolacijski polinomi
M_{bx}, M_{by}, M_{bz}, m_b, m_{bx}	zadani momenti duž ruba razmatranoga kontinuuma
M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}	komponente vektora momenta u Kartezijevim koordinatama u i-tom čvoru konačnog elementa
m_x	kontinuirani moment uvijanja
M_x, M_y, M_z	unutarnji momenti oko Kartezijevih koordinatnih osi
M_T, M_{xy}, M_{nt}	unutarnji momenti uvijanja
M_1, M_2, M_{12}, M_{21}	unutarnji momenti u ljuskastom kontinuumu
$\mathbf{m}$	matrica mase konačnog elementa
$\mathbf{N}$	matrica funkcija oblika
$\mathbf{N}_n^a$, $\mathbf{N}_n^s$	matrice funkcija oblika za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierovih redova
$\mathbf{N}_i$	matrica funkcija oblika za i-ti čvor, submatrica u matrici $\mathbf{N}$
$\mathbf{N}_\sigma$	matrica funkcija oblika za naprezanje
N	unutarnja uzdužna sila
N_i, N_i^*	funkcije oblika za i-ti čvor konačnog elementa
N_x, N_y, N_{xy}	unutarnje sile u Kartezijevu koordinatnom sustavu
N_n, N_{nt}	unutarnje sile u lokalnim koordinatama n, t
N_1, N_2, N_{12}, N_{21}	unutarnje membranske sile u ljuskastom kontinuumu
$\overline{N}_{21}$	efektivna ili Kirchhoffova posmična sila
$\mathbf{n}$	vektor normale na rubu razmatranoga kontinuuma, vektor normale na srednjoj plohi ljuskastoga kontinuuma, normala na stranici konačnog elementa
n	lokalna koordinata u pravcu normale $\mathbf{n}$

n_b, n_{bn}, n_{bnt}	vanjske rubne sile
ni, nj, nk	broj točaka integracije
$\mathbf{P}_q$, $\mathbf{P}_\sigma$	matrice u formulaciji hibridne metode sila
$\mathbf{Q}$	vektor vanjskih koncentriranih čvornih sila
Q	kvadratni oblik matrice
Q_x, Q_y, Q_z	unutarnje poprečne sile u Kartezijevu koordinatnom sustavu
$\overline{Q_n}$, $\overline{Q_x}$, $\overline{Q_2}$	efektivne ili Kirchhoffove poprečne sile
Q_1, Q_2, Q_n	unutarnje poprečne sile u ljuskastom kontinuumu
$\mathbf{q}$	vektor volumenskih sila, poznata funkcija neovisnih varijabli
$\mathbf{q}_b$	vektor površinskog opterećenja
$\mathbf{q}_S$	vektor površinskih sila
q_{bx}, q_{by}, q_{bz}, q_x, q_y, q_z	komponente vektora opterećenja u Kartezijevu koordinatnom sustavu
q_r, q_φ, q_z	komponente vektora opterećenja u cilindričnom koordinatnom sustavu
q_{vx}, q_{vy}, q_{vz}	komponente vektora volumenskih sila u Kartezijevu koordinatnom sustavu
q_1, q_2, q_n	komponente vektora opterećenja na srednjoj plohi ljuske
$\mathbf{R}$	globalni vektor ukupnih čvornih sila, matrica ostatka ili reziduala
$\mathbf{R}_n^a$ $\mathbf{R}_n^s$	globalni vektor ukupnih čvornih sila za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{R}_q$	operator površinskog opterećenja
$\mathbf{R}_S$, $\mathbf{R}_V$	globalni vektori površinskih i volumenskih sila
$\mathbf{R}_u$	operator rubnih pomaka
$\mathbf{R}_v$	matrica transformacije u formulaciji ljuskastih elemenata
R_1, R_2	glavni polumjeri zakrivljenosti srednje plohe ljuskastoga kontinuuma

$\mathbf{r}$	vektor ukupnih čvornih sila konačnog elementa, vektor položaja
r, φ, z	cilindrične koordinate
r_i, z_i	cilindrične koordinate i-tog čvora konačnog elementa
$\mathbf{S}$	matrica raspodjele naprezanja u konačnom elementu
S	površina plohe
S_q	površina na kojoj je zadano opterećenje
S_u	površina na kojoj su zadani pomaci
s	lokalna koordinata duž ruba konačnog elementa, lokalna koordinata duž izvodnice osnosimetričnoga konačnog elementa
$\mathbf{T}$	matrica transformacije
$\mathbf{T}_\varepsilon$	matrica transformacije za komponente tenzora deformacije
T	temperatura
$\mathbf{t}$	vektor tangente na rubnu plohu kontinuuma
$\mathbf{u}$	vektor pomaka, vektor zavisnih varijabli
$\mathbf{u}_b$	vektor zadanih rubnih pomaka
$\mathbf{u}_S$	vektor pomaka na plohi površine S
u, v, w	komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu, komponente pomaka srednje plohe ljuskastoga kontinuuma u pravcu jediničnih vektora $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_n$
$\overline{u}$, $\overline{w}$	komponente pomaka srednje plohe osnosimetrične ljuske u pravcu globalnih cilindričnih koordinata r i z
$\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$	komponente pomaka u pravcu lokalnih Kartezijevih koordinata $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$
u_b, v_b, w_b	komponente zadanih rubnih pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu
u_{bn}, u_{bt}	normalna i tangencijalna komponenta zadanog pomaka
u_n, u_t	normalna i tangencijalna komponenta pomaka
u_i, v_i, w_i	komponente pomaka i-tog čvora konačnog elementa

u_r , v_φ , w	komponente pomaka u cilindričnom koordinatnom sustavu
u_{ri} , w_i	komponente pomaka i-tog čvora konačnog elementa u cilindričnom koordinatnom sustavu
u_S , v_S , w_S	komponente pomaka na plohi površine S
$\mathbf{V}$	vektor globalnih stupnjeva slobode
$\mathbf{V}_n^a$, $\mathbf{V}_n^s$	globalni vektori stupnjeva slobode za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
$\mathbf{V}_1^i$, $\mathbf{V}_2^i$, $\mathbf{V}_3^i$	vektori u i-tom čvoru degeneriranoga ljuskastog elementa
V_i	globalni stupnjevi slobode
$\mathbf{v}$	vektor stupnjeva slobode konačnog elementa
$\mathbf{v}_i$	vektor stupnjeva slobode i-tog čvora
$\mathbf{v}_m$, $\mathbf{v}_p$, $\mathbf{v}_{\varphi z}$	subvektori u vektoru pomaka ravnoga ljuskastog elementa
$\mathbf{v}_n^a$, $\mathbf{v}_n^s$	vektori stupnjeva slobode konačnog elementa za antisimetrične i simetrične harmonike Fourierova reda
v_i	lokalni stupnjevi slobode konačnog elementa
V	volumen
$\mathbf{W}$	matrica težinskih funkcija
W_e , W_i	rad vanjskih i unutarnjih sila
w_i , w_{ij} , w_{ijk}	težinski faktori pri numeričkoj integraciji
$\mathbf{X}$	matrica vlastitih vektora
$\mathbf{x}$	vlastiti vektor
$\underline{\mathbf{x}}_1$, $\underline{\mathbf{x}}_2$	normirani vlastiti vektori
X, Y, Z, x, y, z	Kartezijeve koordinate
$\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$	lokalni Kartezijev koordinatni sustav
X_i , Y_i , Z_i , x_i , y_i , z_i	Kartezijeve koordinate i-tog čvora konačnog elementa
$\boldsymbol{\alpha}$	matrica funkcija u interpolacijskim polinomima
α	kut
α_T	koeficijent toplinskog rastezanja

α_i , β_i	rotacije u i-tom čvoru degeneriranoga ljuskastog elementa, stupnjevi slobode degeneriranoga ljuskastog elementa
α_1 , α_2	krivocrtne koordinate
$\boldsymbol{\beta}$	vektor poopćenih parametara u formulaciji hibridne metode sila
$\gamma_{r\varphi}$, $\gamma_{\varphi z}$, γ_{zr}	kutne deformacije u cilindričnom koordinatnom sustavu
γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}	kutne deformacije u Kartezijevu koordinatnom sustavu
ΔT	promjena temperature
δ	oznaka varijacije
δ_{dop}	dopuštena distordiranost konačnog elementa
δ_{ij}	Kroneckerov simbol
δ_n	mjera za distordiranost n-tog elementa
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenzor deformacije
$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	vektor čiji su članovi komponente deformacije u lokalnom koordinatnom sustavu $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_m$	vektor čiji su članovi membranske deformacije u ljuskastom kontinuumu
$\boldsymbol{\varepsilon}_f$	vektor čiji članovi opisuju zakrivljenost srednje plohe ljuskastoga kontinuuma
$\boldsymbol{\varepsilon}_0$	tenzor početne deformacije
ε_{ij}	komponente tenzora deformacije
ε_r , ε_φ , ε_z	duljinske deformacije u cilindričnom koordinatnom sustavu
ε_x , ε_y , ε_z	duljinske deformacije u Kartezijevu koordinatnom sustavu
θ	meridijalni kut osnosimetrične ljuske
ϑ	kut zakreta normale na srednju plohu ljuske
ϑ_1 , ϑ_2	stupnjevi slobode prstenastoga ljuskastog elementa
ϑ , ϑ_x	relativni kutovi uvijanja
κ	konstanta prigušenja

κ_1 , κ_2 , κ_x , κ_y	zakrivljenosti deformirane srednje plohe, zakrivljenosti elastične crte štapa
κ_{12} , κ_{xy}	uvijenost deformirane srednje plohe
$\mathbf{\Lambda}$	dijagonalna matrica vlastitih vrijednosti
λ	vlastita vrijednost, Laméova elastična konstanta
μ	Laméova elastična konstanta
ν	Poissonov faktor
ξ , η , ζ	bezdimenzijske prirodne koordinate
ξ_i , η_i , ζ_i	prirodne koordinate *i*-tog čvora konačnog elementa
Π	ukupna potencijalna energija
Π^*	komplementarna potencijalna energija
Π_i	potencijalna energija elastičnog deformiranja
Π_e	potencijalna energija vanjskih sila
Π_{HW}	Hu-Washizuov funkcional
Π_{HR}	Hellinger-Reissnerov funkcional
π	ukupna potencijalna energija konačnog elementa
ρ	gustoća
$\boldsymbol{\sigma}$	tenzor naprezanja
$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$	vektor čiji su članovi komponente naprezanja u lokalnom koordinatnom sustavu $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	vektor čiji su članovi naprezanja u čvorovima konačnog elementa
$\boldsymbol{\sigma}_m$	vektor unutarnjih membranskih sila u ljuskastom kontinuumu
$\boldsymbol{\sigma}_f$	vektor unutarnjih momenata u ljuskastom kontinuumu
σ_{ij}	komponente tenzora naprezanja
σ_x , σ_y , σ_z	normalne komponente naprezanja u Kartezijevu koordinatnom sustavu
σ_r , σ_φ , σ_z	normalne komponente naprezanja u cilindričnom koordinatnom sustavu

σ_{11}, σ_{22}	normalne komponente naprezanja u ljuskastom kontinuumu
σ_{12}, σ_{21}, σ_{13}, σ_{23}	posmične komponente naprezanja u ljuskastom kontinuumu
τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}	posmične komponente naprezanja u Kartezijevu koordinatnom sustavu
$\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$, τ_{zr}	posmične komponente naprezanja u cilindričnom koordinatnom sustavu
φ	kut između normale na stranicu konačnog elementa i koordinatne osi
φ_{bn}, φ_{bx}, φ_{by}, φ_{bz}	zadani kutovi zakreta
φ_{ix}, φ_{iy}	kutovi zakreta u čvorovima konačnog elementa
φ_x, φ_y, φ_z	kutovi zakreta u razmatranom kontinuumu, kutovi zakreta u konačnom elementu
$\hat{\psi}$	vektor čvornih vrijednosti torzijske funkcije naprezanja
ψ	torzijska funkcija naprezanja
ψ_i	torzijska funkcija naprezanja u i-tom čvoru konačnog elementa
ω	kutna brzina

1. UVOD

1.1. O metodi konačnih elemenata

Klasične metode rješavanja problema kontinuiranih sustava temelje se na rješavanju diferencijalnih jednadžbi čije je točno analitičko rješenje moguće dobiti samo za jednostavnije proračunske modele. U općem slučaju vrlo je teško dobiti rješenje koje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u cijelom području razmatranog modela. Stoga se rabe približne numeričke metode koje se temelje na diskretizaciji kontinuiranog sustava gdje se diferencijalne jednadžbe zamjenjuju sustavom algebarskih jednadžbi.

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama na konturi koje se nazivaju čvorovi. Stanje u svakom elementu, kao što je npr. polje pomaka, deformacije, naprezanja, temperature te ostalih veličina u problemu polja, opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Te funkcije moraju zadovoljavati odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava. Uz pravilnu formulaciju konačnih elemenata, približavanje točnome rješenju raste s povećavanjem broja elemenata. Prilikom izvođenja algebarskih jednadžbi polazi se od diferencijalnih jednadžbi koje opisuju stanje u elementu ili se rabi varijacijska formulacija. Nakon izvođenja jednadžbi za konačni element, gdje su nepoznanice neovisne varijable u čvorovima, odgovarajućim postupcima izvode se globalne jednadžbe za diskretizirani model. Pomoću izračunatih čvornih veličina moguće je, primjenom poznatih teorijskih relacija, odrediti sve veličine potrebne za analizu opisanoga

kontinuiranog sustava. Složene konstrukcije zahtijevaju diskretizaciju s velikim brojem elemenata te valja riješiti sustav algebarskih jednadžbi s velikim brojem nepoznanica, što je bez korištenja računala vrlo teško postići. Na taj način, za rješavanje problema primjenom metode konačnih elemenata nužna je primjena računala, a to zahtijeva izradu odgovarajućih računalnih programa. Metoda konačnih elemenata primjenjuje se u mehanici deformabilnih tijela za rješavanje statičkih i dinamičkih problema, i jednako tako za rješavanje općih problema polja kao što su proračun temperaturnih polja, proračun strujanja te analiza elektromagnetnih polja. Izvođenje sustava algebarskih jednadžbi analogno je za sva spomenuta područja. Ovdje će se razmatranja ograničiti na rješavanje linearnih statičkih problema u mehanici deformabilnih tijela.

Postupak izvođenja jednadžbe konačnog elementa koji se temelji na rješavanju diferencijalne jednadžbe jest metoda težinskog reziduala. Pretpostavljeno približno rješenje, koje je funkcija neovisnih parametara u čvorovima elementa, uvrštava se u diferencijalnu jednadžbu pri čemu se pojavljuje ostatak ili rezidual. Ako je rezidual jednak nuli, rješenje diferencijalne jednadžbe je točno. Metodama minimizacije reziduala dobiva se sustav algebarskih jednadžbi čije su nepoznanice parametri u čvorovima. Pritom se često rabi Galerkinov postupak. Opisani postupak se najčešće primjenjuje kad je varijacijska formulacija složena ili kad ne postoji funkcional za opisivanje postavljenoga problema.

Drugi način izvođenja jednadžbe konačnog elementa temelji se na varijacijskoj formulaciji. Ovisno o neovisnim varijablama po kojima se provodi varijacija, za rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela razlikuju se: princip virtualnih pomaka i princip minimuma ukupne potencijalne energije gdje su neovisne varijable pomaci, te princip virtualnih sila i princip minimuma komplementarne energije gdje su neovisne varijable sile. Osim toga, primjenjuju se i tzv. prošireni varijacijski principi s više neovisnih polja kao što su naprezanja, deformacije i pomaci.

Ako su neovisne varijable sile, odnosno naprezanja, metoda konačnih elemenata jest metoda sila. U jednadžbi konačnog elementa nepoznate sile, odnosno naprezanja u čvorovima i zadani pomaci povezani su preko matrice podatljivosti. Zbog poteškoća u izboru funkcija naprezanja tako da svi zahtijevani uvjeti budu zadovoljeni te zbog složenog izvođenja globalne matrice podatljivosti, ta metoda se relativno rijetko rabi. Dobra strana metode sila je neposredno određivanje polja naprezanja koja su od primarnog značenja za analizu čvrstoće konstrukcija.

Mnogo češće se rabi metoda pomaka, gdje su nepoznate veličine pomaci u čvorovima konačnih elemenata. Pritom su zadane sile i nepoznati pomaci povezani preko matrice krutosti. U metodi pomaka raspodjela naprezanja izračunava se

deriviranjem polja pomaka te na taj način kontinuitet naprezanja duž rubova konačnih elemenata u općem slučaju nije zadovoljen, što je nedostatak u odnosu na metodu sila.

Ako su neovisne varijable pomaci, naprezanja i deformacije, radi se o mješovitoj formulaciji konačnih elemenata. Jednadžba konačnog elementa najčešće se izvodi iz varijacijskih principa kao što su Hu-Washizuov i Hellinger-Reissnerov princip. Pritom su u općem slučaju u funkcionalu sadržani svi uvjeti koje trebaju zadovoljiti nepoznate funkcije. Ta se formulacija primjenjuje pri konačnim elementima za analizu ploča i ljusaka, gdje pridonosi eliminiranju odgovarajućih nepoželjnih pojava kao što su nepotpuna kompatibilnost i tzv. "locking" efekti.

Osim ovdje opisanih postupaka, u metodi konačnih elemenata primjenjuje se i hibridna formulacija koja se kao i mješovita formulacija temelji na više različitih polja neovisnih varijabli. Najčešće se primjenjuju dva polja. Naime, unutar elementa pretpostavlja se raspodjela pomaka ili naprezanja koja je neovisna o pretpostavljenoj raspodjeli pomaka ili naprezanja duž rubova konačnoga elementa. Na taj način se pridonosi zadovoljavanju rubnih uvjeta te je moguće, isto kao i pri mješovitoj formulaciji, eliminirati nepoželjni "locking" efekt. Razlikuju se hibridna metoda pomaka i mješovita hibridna metoda koje se izvode iz principa minimuma ukupne potencijalne energije, te hibridna metoda sila pri čemu se jednadžba konačnog elementa izvodi iz principa minimuma ukupne komplementarne energije.

1.2. Razvoj metode konačnih elemenata

Točan početak razvoja metode konačnih elemenata vrlo je teško utvrditi. Moglo bi se reći da je sama ideja zamjene kontinuiranog sustava s više diskretnih elemenata nastala početkom četrdesetih godina dvadesetoga stoljeća. A. Hrenikoff je 1941. pokušao riješiti problem teorije elastičnosti pri čemu je na temelju intuicije elastični kontinuum podijelio na više jednostavnih međusobno spojenih štapnih elemenata. Na taj je način kontinuirani sustav zamijenio rešetkastom konstrukcijom za koju je bilo moguće naći rješenje pomoću tada već poznatih standardnih metoda. Na sličan način postupili su D. McHenry 1943. godine i N. M. Newmark 1949. godine.

Podjela elastičnoga kontinuuma na više elemenata, koji čine manje dijelove kontinuuma koji se spajaju u zajedničkim točkama, prvi se put pojavljuje u radovima J. H. Argyrisa 1954. godine i M. J. Turnera, R. W. Clougha, H. C. Martina i L. J. Toppa 1956. godine. Pojam konačnog elemenata (Finite Element) prvi je uveo R. W. Clough 1960. godine. Otprilike u isto doba počinje i primjena računala za rješavanje inženjerskih problema. Nastaje i matrični zapis u meto-

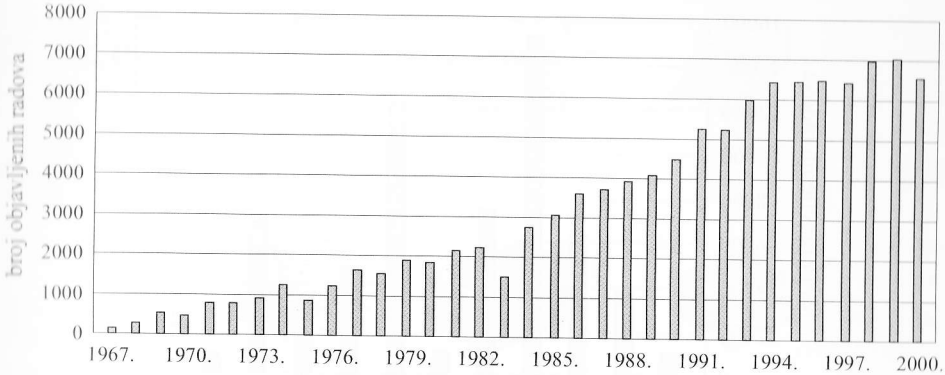
dama analize konstrukcija, što omogućuje njihovo prilagođivanje primjeni računala. Iz područja matričnih metoda važni su radovi J. H. Argyrisa 1960. i 1962. godine te R. H. Gallaghera 1962. godine.

R. W. Clough je u svom radu 1965. godine pokazao da je jednadžbu konačnog elementa moguće izvesti pomoću varijacijske Rayleigh-Ritzove metode. Na taj se način pokazalo da matematička interpretacija metode konačnih elemenata počiva na tada poznatom klasičnom radu R. Couranta iz 1943. godine. R. Courant je odredio torzijsku krutost šupljeg profila tako da je presjek podijelio na trokutne dijelove za koje je pretpostavio linearnu funkciju naprezanja [45]. To je razlogom da se spomenuti Courantov članak može smatrati prvom formulacijom metode konačnih elemenata.

Nakon što se shvatilo da se metoda konačnih elemenata može matematički formulirati, njezina se primjena počela širiti i na druga područja izvan teorije elastičnosti. U radovima O. C. Zienkiewicza i Y. K. Cheunga iz 1965. godine primijenjena je metoda konačnih elemenata na područje mehanike fluida, a E. L. Wilson i R. E. Nickell su 1966. riješili problem prijelaza topline. Ubrzo je pokazano da je za rješavanje problema teorije elastičnosti moguće primijeniti različite varijacijske formulacije. B. Fraeijs de Veubeke je 1965. i 1967. prikazao primjenu principa minimuma komplementarne potencijalne energije. Reissnerov funkcional je prvi primijenio L. R. Herrmann 1965. godine, a hibridnu formulaciju prvi su primijenili T. H. H. Pian i P. Tong 1969. godine. Krajem 1960-ih godina pojavljuje se i rezidualna formulacija metode konačnih elemenata. Autori B. A. Szabo i G. C. Lee u svom su radu 1969. godine pokazali da je matricu krutosti konačnog elementa moguće izvesti pomoću Galerkinove metode težinskog reziduala, pri čemu se polazi od diferencijalne jednadžbe razmatranog problema.

Od 1960. godine broj publikacija iz metode konačnih elemenata naglo raste. Prema [117] godine 1961. objavljeno je 10 radova, 1962. godine 15 radova; taj je broj narastao 1967. godine na 162 rada, a 1968. na 303 rada. Prva konferencija o metodi konačnih elemenata održana je 1965. godine u Daytonu, Ohio, SAD (Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics). Od te godine, prema Argyrisu [7], počinje zlatno razdoblje razvoja metode konačnih elemenata. Prva knjiga iz metode konačnih elemenata objavljena je 1967. godine (O. C. Zienkiewicz i Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, Mc.Graw-Hill, New York). Prema [76], između 1967. i 1999. objavljeno je ukupno 467 knjiga. Prema istom autoru prvi je računalni program temeljen na metodi konačnih elemenata nastao između 1960. i 1970. godine, a 2002. godine je registrirano 1538 programa. Na samom početku razvoja metoda konačnih elemenata se odnosila uglavnom na linearne statičke probleme u mehanici deformabilnih tijela, a potom se proširila na dinamičke probleme. Nakon

toga se sve više primjenjuje i na drugim područjima kao što su mehanika fluida i prijenos topline. Danas je ta numerička metoda prisutna u gotovo svim inženjerskim granama koje su vezane za modeliranje različitih fizikalnih procesa. Njihova je najveća primjena u zrakoplovstvu, projektiranju i konstruiranju različitih strojarskih konstrukcija, građevinarstvu, brodogradnji, geotehnici, elektrotehnici. Posebno mjesto zauzima u automobilskoj industriji, a u novije doba važniju ulogu sve više dobiva i u biomehanici.

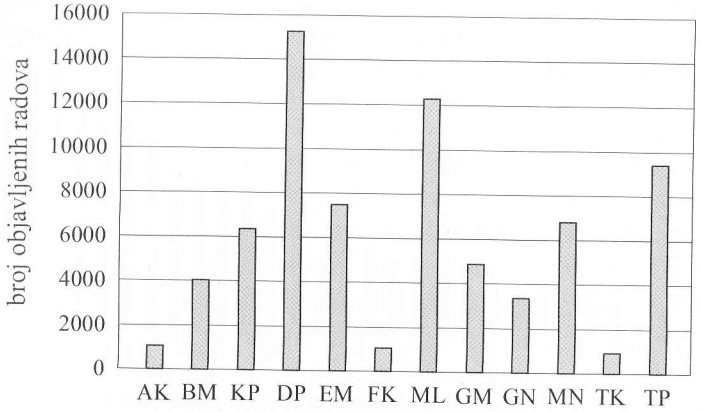


Slika 1.1. Pregled objavljene literature iz metode konačnih elemenata za razdoblje 1967.–2000. [76]

Pregled objavljene literature iz metode konačnih elemenata za razdoblje od 1967. do 2000. prikazan je na slici 1.1. Dijagram je preuzet iz [76]. Uključeni su svi objavljeni radovi zajedno s knjigama pri čemu nije obuhvaćeno rješavanje problema mehanike fluida. Nije teško uočiti da broj radova raste eksponencijalno do 1994. godine nakon čega je rast usporen. U posljednjim godinama broj radova je narastao na oko 7000 na godinu. Na slici 1.2. prikazan je, također prema [76], broj članaka za razdoblje od 1976. do 1999. prema temama koje se u njima razmatraju. Obuhvaćeni su časopisi, zbornici radova sa znanstvenih skupova i doktorske disertacije. Može se pretpostaviti da posljednjih nekoliko godina nije došlo do znatnijih promjena. Na slici su prikazane sljedeće teme: akustika (AK), biomehanika (BM), rješavanje kontaktnih problema (KP), dinamički problemi (DP), elektromagnetizam (EM), međudjelovanje fluida i konstrukcije (FK), mehanika loma (ML), geomehanika (GM), geometrijski nelinearni problemi (GN), problemi materijalne nelinearnosti (MN), međudjelovanje tla i konstrukcije (TK) i toplinski problemi (TP).

Iz dijagrama na slici 1.2. vidi se da je znatan broj članaka iz područja dinamike, mehanike loma, toplinskih problema, elektromagnetizma te problema materijalne nelinearnosti. Ako se problemima materijalne nelinearnosti pribroji geometrijska nelinearnost, dolazi se do zaključka da su istraživanja u velikoj mjeri

usmjerena na rješavanje nelinearnih problema. U svim navedenim područjima osnovni je cilj približiti se numeričkim modeliranjem što više realnim procesima koji se simuliraju. Nastoji se postići što je moguće veća numerička učinkovitost, a to znači uz što kraće vrijeme računanja doći do dovoljno točnih rješenja. Osim razvoja novih algoritama na razini točke integracije konačnog elementa, još uvijek se radi i na razvoju novih elemenata koji omogućuju modeliranje sve složenijih konstrukcija.



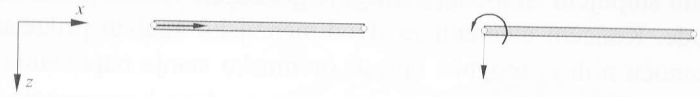
Slika 1.2. Prikaz broja članaka prema temama za razdoblje 1976.–1999. [76]

Izvedeni su i algoritmi za automatsko generiranje mreže (Adaptive Finite Element Refinement) što je vezano za procjenu greške pri diskretizaciji proračunskog modela. Automatska kontrola greške veže sa sobom mogućnost promjene veličine elemenata u cilju postizanja mreže koja daje veću točnost, što predstavlja tzv. *h*-postupak. Drugi način za povećanje točnosti rješenja, povećanje je stupnja polinoma interpolacijske funkcije pri čemu veličine elemenata ostaju nepromijenjene, a što se u literaturi naziva *p*-metoda. Kombinacija jednog i drugog postupka poznata je kao *h/p*-metoda. Više o spomenutim metodama može se naći u [118]. U novije doba metoda konačnih elemenata sve se više primjenjuje u procesu konstruiranja (Finite Element Based Design) gdje važnu ulogu ima u optimiranju konstrukcija [59].

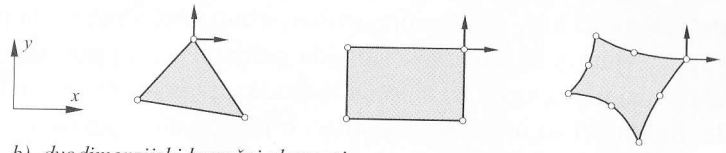
1.3. Osnovni konačni elementi i pregled primjene

Ovisno o obliku i nepoznatim parametrima u čvorovima, izvedeni su različiti tipovi konačnih elemenata. Veći broj nepoznanica zahtijeva složeniju interpolacijsku funkciju u području elementa. Jednostavniji konačni elementi koji se najčešće primjenjuju u mehanici deformabilnih tijela prikazani su na slici 1.3. Ne-

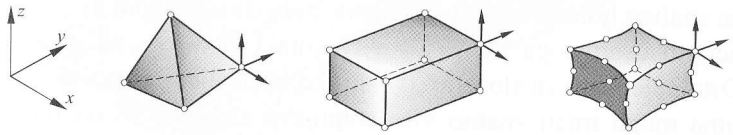
poznati parametri u čvorovima, koji u metodi pomaka u mehanici deformabilnih tijela opisuju pomake i derivacije pomaka, stupnjevi su slobode elementa.



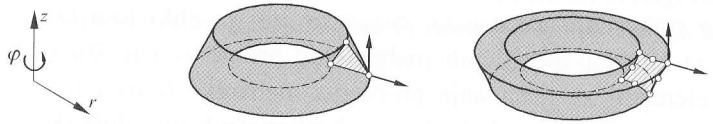
a) jednodimenzijski konačni elementi



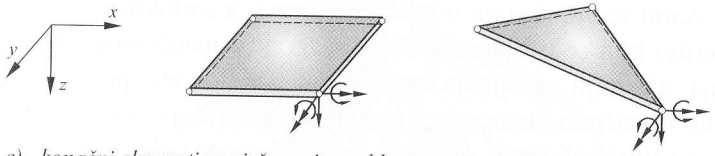
b) dvodimenzijski konačni elementi



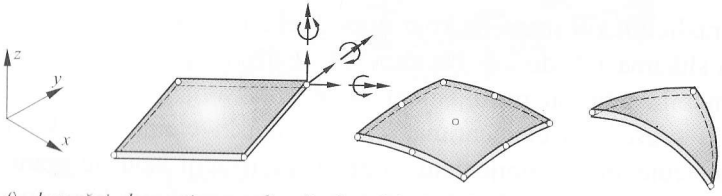
c) trodimenzijski konačni elementi



d) osnosimetrični konačni elementi



e) konačni elementi za rješavanje problema savijanja ploča



f) konačni elementi za analizu ljuskastih konstrukcija

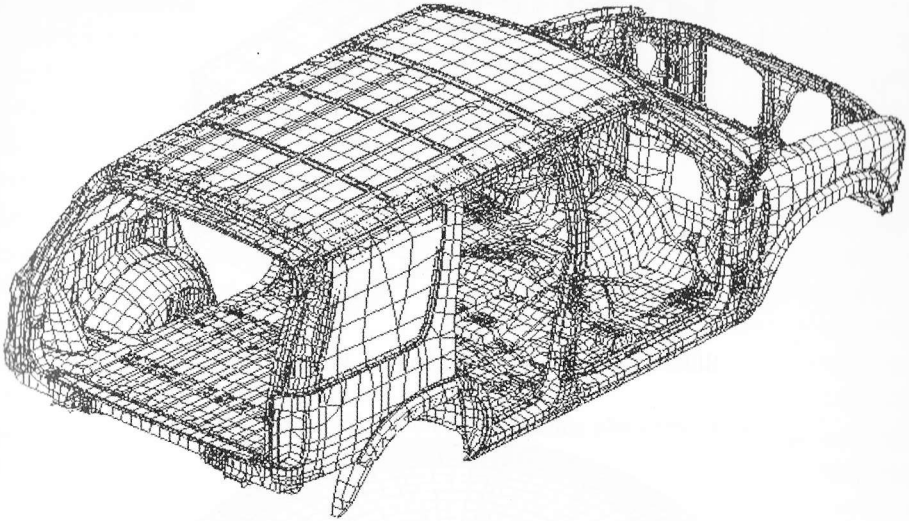
Slika 1.3. Osnovni konačni elementi

Najjednostavniji konačni elementi za rješavanje jednodimenzijskih problema štapni su i gredni elementi, slika 1.3a. Prvi je osnovni štapni element s dva čvora sa po jednim stupnjem slobode, a drugi je gredni element koji ima ukupno 4 stupnja slobode. Konačni elementi za dvodimenzijsku analizu prikazani su na slici 1.3b. Pomoću njih je moguće opisati ravninsko stanje naprezanja i deformacije pri čemu su nepoznati parametri u čvorovima dvije komponente pomaka. Slika 1.3c prikazuje elemente za trodimenzijsku analizu s čvorovima sa po tri komponente pomaka u pravcu Kartezijevih koordinatnih osi. Osnosimetrični tzv. prstenasti elementi koji omogućuju analizu osnosimetričnih tijela prikazani su na slici 1.3d. Njihovi su stupnjevi slobode radijalni i osni pomaci. Osnovni elementi za analizu ploča sa po tri stupnja slobode u svakom čvoru prikazani su na slici 1.3e. Stupnjevi su im slobode pomaci u pravcu normale na srednju plohu ploče i kutovi zakreta normale oko dvije osi koje leže u ravnini ploče. Ljuske se modeliraju pomoću elemenata na slici 1.3f. Prvi prikazani element ravni je element za analizu ljusaka sa šest stupnjeva slobode u svakom čvoru, a izvodi se superpozicijom osnovnoga pločastog elementa i elementa za dvodimenzijsku analizu. Ostali elementi su složeniji dvostruko zakrivljeni ljuskasti elementi koji u čvorovima mogu imati znatno više stupnjeva slobode. Svaki od prikazanih elemenata moguće je proširiti dodavanjem čvorova duž bridova ili po površini elementa, kao i povećavanjem broja neovisnih veličina u svakom čvoru.

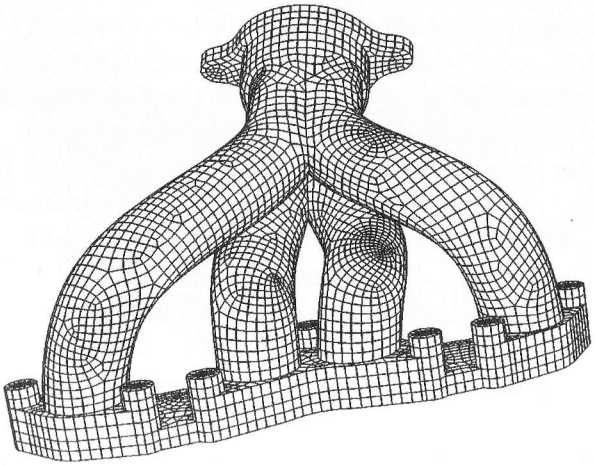
Osim ovdje prikazanih elemenata, danas se rabi i veliki broj tzv. specijalnih elemenata za analizu specifičnih mehaničkih problema kao što su na primjer singularni elementi za rješavanje problema mehanike loma i beskonačni elementi koji se primjenjuju u diskretizaciji beskonačnih ili polubeskonačnih područja [118]. Za analizu velikih konstrukcija kao što su zrakoplovi ili plovni objekti rabe se tzv. superelementi [93]. Superelementi nastaju spajanjem više elemenata pri čemu se eliminiraju unutarnji čvorovi, a zadržavaju se samo važniji vanjski čvorovi koji se u literaturi često nazivaju superčvorovi. U problemima projektiranja, a u cilju smanjenja broja stupnjeva slobode, pogodno je koristiti se složenijim konačnim elementima (makroelementi) kao što su na primjer element orebrene ljuske ili ploče, trodimenzijski element tankostjene kutije te drugi slični elementi [93].

Nekoliko različitih konstrukcija koje su podijeljene na konačne elemente prikazano je na slikama 1.4. do 1.8. Na slici 1.4. je diskretizirana konstrukcija osobnog automobila gdje su primijenjeni ravni i zakrivljeni ljuskasti elementi u kombinaciji s grednim elementima. Trodimenzijski elementi u kombinaciji s ljuskastim elementima primijenjeni su pri diskretizaciji ispušne grane motora s unutarnjim izgaranjem na slici 1.5. Rešetkasta konstrukcija kontejnera podijeljena je na gredne elemente na slici 1.6. Na slici 1.7. je diskretizirana konstrukcija tankostjenog vertikalnog spremnika. Prikazani su cilindrični plašt i sferni

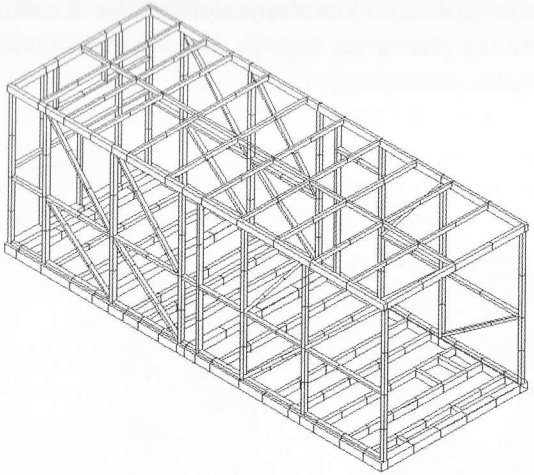
krov sa zakrivljenim ljuskastim konačnim elementima. Konstrukcija gornjeg dijela stacionarne bušaće platforme, koja je diskretizirana ravnim elementima za analizu ploča i ljusaka, prikazana je na slici 1.8.



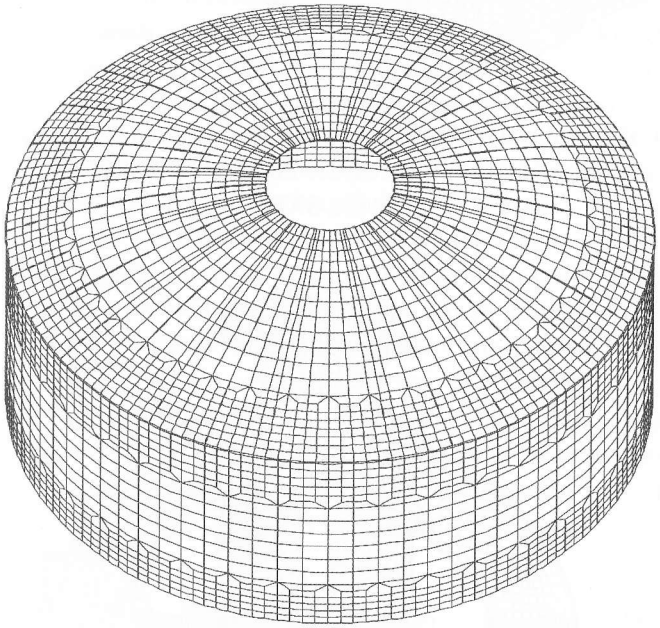
Slika 1.4. Konstrukcija osobnog automobila (ljubaznošću dr. S. Nageswarana, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California Irvine, SAD)



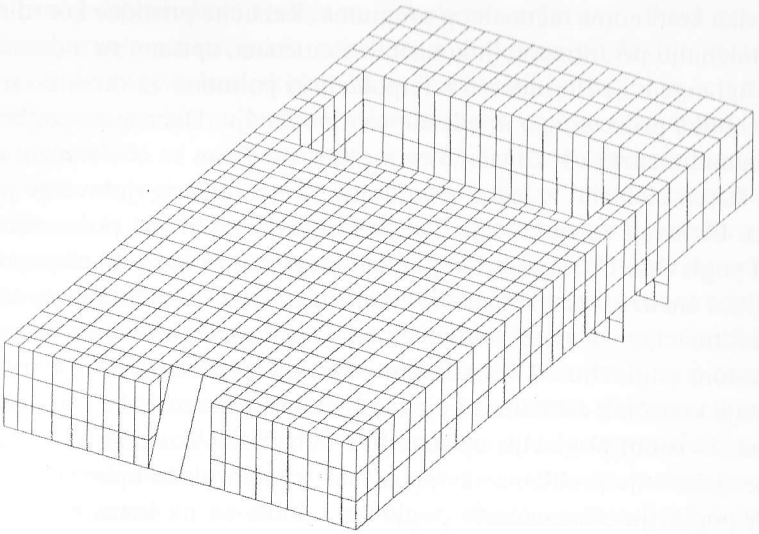
Slika 1.5. Ispušna grana motora s unutarnjim izgaranjem [1]



Slika 1.6. Rešetkasta konstrukcija kontejnera [57]



Slika 1.7. Tankostjeni vertikalni spremnik [61]



Slika 1.8. Gornji dio stacionarne bušaće platforme [62]

1.4. Pregled sadržaja

Osnovna je zadaća ovoga udžbenika prikazati formulaciju konačnih elemenata za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela. Formulacija je temeljena na metodi pomaka, a razmatraju se samo linearni statički problemi. Udžbenik je podijeljen na 19 poglavlja. Nakon prvoga, uvodnog poglavlja, u drugom poglavlju dane su osnove matričnog računa koje su neophodne za razumijevanje i izvođenje relacija konačnih elemenata. Osnovne jednadžbe teorije elastičnosti prikazane su u trećem poglavlju. Jednadžbe obuhvaćaju prostorne probleme, ravninsko stanje naprezanja i deformacije te stanje osnosimetrične deformacije. Osim toga, razmatrani su problemi štapnih nosača zajedno s analizom tankostjenih pločastih i ljuskastih konstrukcija. U četvrtom poglavlju prikazani su varijacijski principi na kojima se temelje formulacije konačnih elemenata. Rješavanje problema mehanike kontinuuma pomoću metode težinskog reziduala i varijacijske Rayleigh-Ritzove metode prikazano je u petom poglavlju. Direktna formulacija konačnih elemenata opisana je u šestom poglavlju. U sedmom je poglavlju prikazana formulacija konačnih elemenata temeljena na metodi težinskog reziduala pri čemu se polazi od diferencijalne jednadžbe razmatranog problema. Varijacijska formulacija prikazana je u osmom poglavlju. Izvedene su jednadžbe konačnog elementa za rješavanje statičkih i dinamičkih problema. Prikazan je izvod globalne jednadžbe konačnih elemenata za proračunski model. U devetom se poglavlju razmatraju uvjeti potrebni za konvergenciju rješe-

nja te je dan kratki opis računalnog programa. Različite prirodne koordinate, koje se primjenjuju pri formulaciji konačnih elemenata, opisane su u desetom poglavlju. Lagrangeovi i Hermiteovi interpolacijski polinomi za direktno izvođenje funkcija oblika prikazani su u jedanaestom poglavlju. Dvanaesto poglavlje daje prikaz jednodimenzijskih konačnih elemenata, pri čemu su obuhvaćeni osno opterećeni štapni elementi zajedno s grednim elementima za rješavanje problema savijanja. Elementi za rješavanje dvodimenzijskih problema prikazani su u trinaestom poglavlju. U četrnaestom poglavlju opisani su konačni elementi za trodimenzijsku analizu. Osnosimetrični elementi za rješavanje problema osnosimetrične deformacije i za slučaj kad opterećenje nije osnosimetrično, razmatraju se u petnaestom poglavlju. U šesnaestom poglavlju prikazana je izoparametarska formulacija konačnih elemenata koja obuhvaća dvodimenzijske i trodimenzijske probleme. U istom poglavlju opisana je i numerička integracija. Konačni elementi za rješavanje problema savijanja tankostjenih ploča opisani su u sedamnaestom poglavlju. Osamnaesto poglavlje odnosi se na konačne elemente za analizu ljuskastih konstrukcija. Razmatraju se ravni i dvostruko zakrivljeni elementi za analizu proizvoljnih ljuskastih oblika zajedno s osnosimetričnim elementima za rješavanje problema osnosimetričnih ljusaka. U posljednjem, devetnaestom poglavlju kratki je osvrt na mješovitu i hibridnu formulaciju konačnih elemenata. Na samom kraju udžbenika je, abecednim redom, dan pregled korištene literature, a nakon toga kazalo pojmova.

Sva poglavlja su poredana logičkim slijedom. Budući da za numeričko modeliranje deformiranja čvrstih tijela treba znati osnove mehanike deformabilnih tijela, nakon osnova matričnog računa, u trećem poglavlju su prikazane osnovne relacije teorije elastičnosti zajedno s relacijama za rješavanje problema osnovnih konstrukcijskih oblika kao što su štapovi, ploče i ljuske. Navedene relacije neophodne su za razumijevanje problema koji se rješava, a jednako tako i za formulaciju odgovarajućih konačnih elemenata. Bez razumijevanja procesa deformiranja koji se modelira i poznavanja formulacije konačnih elemenata nije moguće kritički pristupiti približnim numeričkim rješenjima, što može dovesti do pogrešne procjene stanja naprezanja i deformacije u konstrukciji. Za bolje razumijevanje trećeg poglavlja treba poznavati osnove teorije elastičnosti te teoriju štapnih nosača zajedno s teorijom savijanja tankostjenih ploča i ljusaka. To se uglavnom obrađuje u prvom dijelu dodiplomskih studija tehničkih fakulteta, kao što su npr. studiji strojarstva, brodogradnje, zrakoplovstva i građevinarstva na Sveučilištu u Zagrebu. Tako su, primjerice, potrebna znanja iz kolegija Nauka o čvrstoći i Čvrstoća konstrukcija koja se predaju na dodiplomskom studiju strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. Za bolje razumijevanje složenijih relacija iz područja teorije ljusaka, koje su navedene u odjeljku 3.7., poželjno je znanje iz opće teorije savijanja tankostjenih ljusaka koje se jednim dijelom obrađuje i na poslijediplomskim studijima, kao što je npr. kolegij Ploče i

ljuske na poslijediplomskom studiju na Fakultetu strojarstva i brodogradnje. Za bolje razumijevanje varijacijskih principa u četvrtom poglavlju, poželjna su predznanja iz osnova varijacijskog računa. Varijacijski principi iz četvrtog poglavlja i rješavanje problema mehanike kontinuuma koje je razmatrano u petom poglavlju neophodni su za formulacije konačnih elemenata koje su opisane u sedmom i osmom poglavlju. Četvrto i peto poglavlje je također potrebno za razumijevanje uvjeta konvergencije rješenja koji se razmatraju u devetom poglavlju. Šesto poglavlje je osobito korisno za čitatelje koji se prvi put susreću s metodom konačnih elemenata; prikazana je direktna formulacija osnovnog štapnog i osnovnog trokutnog elementa koji su najlakši za razumijevanje. Najbolji način za učenje jest s tim elementima riješiti nekoliko jednostavnih problema čije je analitičko rješenje poznato, što je provedeno u primjerima u dvanaestom i trinaestom poglavlju. Za razliku od direktne formulacije iz šestog poglavlja, koju je moguće primijeniti samo za jednostavnije konačne elemente, mnogo su općenitije formulacija pomoću metode težinskog reziduala i varijacijska formulacija koje se razmatraju u sedmom i osmom poglavlju. Za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela mnogo je prikladnija varijacijska formulacija. Prije nego se prijeđe na opisivanje konačnih elemenata koje počinje s dvanaestim poglavljem, uputno je proučiti prirodne koordinate i interpolacijske polinome u desetom i jedanaestom poglavlju. Prirodne koordinate koriste se u izvođenju elemenata višeg reda te pri izoparametarskim elementima i elementima za analizu ploča i ljusaka. Interpolacijski polinomi uglavnom su vezani za direktno izvođenje funkcija oblika. Lagrangeovi interpolacijski polinomi vezani su za Lagrangeove konačne elemente. Elementi su prema složenosti poredani od dvanaestog do osamnaestog poglavlja. Najsloženiji su dvostruko zakrivljeni elementi za analizu tankostjenih ljusaka koji se razmatraju u odjeljku 18.3. Ostale formulacije, koje nisu predmet razmatranja ovog udžbenika, samo su ukratko opisane u devetnaestom poglavlju gdje su, radi boljeg razumijevanja i povezivanja s metodom pomaka, riješena dva jednostavna primjera koja se odnose na mješovitu formulaciju i hibridnu metodu sila.

2. OSNOVE MATRIČNOG RAČUNA

Matrični račun neophodan je za rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkih algoritama. Matrično zapisivanje omogućuje skraćen i kompaktan prikaz složenih matematičkih relacija. Pojam matrice za pravokutni razmještaj koeficijenata u sustavu jednadžbi prvi je uveo engleski matematičar Sylvester 1850. godine, a matrični račun prvi je primijenio Cayley 1858. godine. Matrični račun dobiva na svom pravom značenju početkom šezdesetih godina prošlog stoljeća, s razvojem računala kojeg prati nagli razvoj numeričkih metoda u području inženjerskih znanosti. Ovdje će se prikazati osnovne matrične relacije koje nalaze primjenu u formulaciji metode konačnih elemenata. Polazi se od definicije matrica kako bi se nakon toga prikazale osnovne računske operacije, zaključno s problemom vlastitih vrijednosti.

2.1. Definicija i označivanje matrica

Matrica je pravokutni razmještaj elemenata koji su u općem slučaju poredani u m redaka i n stupaca

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Broj redaka i stupaca određuje red matrice te je na taj način ovdje prikazana matrica reda m x n. Član matrice a_{ij} smješten je u i-tom retku i j-tom stupcu. Članovi matrice mogu biti simboli, brojevi, funkcije ili također matrice. Mogu biti realne i kompleksne veličine, pa se razlikuju realne i kompleksne matrice. Matrice su jednake ako imaju jednaki broj redaka i stupaca i kada su im svi odgovarajući članovi jednaki. U posebnom slučaju kada je $m = n$, matrica je kvadratna. Broj linearno neovisnih redaka ili stupaca određuje rang matrice.

Pomoću matričnog zapisa moguće je sustav linearnih jednadžbi, primjerice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}, \tag{2.2}$$

prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

gdje su nepoznate veličine x_1, x_2, x_3 i x_4. Relaciju (2.3) moguće je zapisati skraćeno pomoću simbola

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.4}$$

gdje je **A** matrica koeficijenata, **x** je matrica nepoznanica, a **b** je matrica poznatih veličina. Ako se matrica sastoji samo od jednoga retka ili stupca, naziva se vektor. Dok se matrice obično označuju velikim masnim slovima, vektori se često označuju osim velikim, također i malim masnim slovima, na primjer

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Često se u literaturi vektor stupac označuje i vitičastim zagradama

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}. \tag{2.6}$$

Matrica čiji su svi članovi jednaki nuli naziva se nul-matrica. Jedinična matrica je kvadratna matrica čiji su članovi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, a svi ostali članovi jednaki su nuli. Označuje se velikim slovom **I** u čijem indeksu se obično nalazi oznaka reda matrice, npr.

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica u kojoj su svi članovi osim onih na glavnoj dijagonali, jednaki nuli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Može se reći da je jedinična matrica poseban slučaj dijagonalne matrice. Ako je u kvadratnoj matrici $a_{ij} = a_{ji}$ za sve parove indeksa, matrica je simetrična.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Gornjotrokutna matrica je matrica u kojoj su svi članovi na glavnoj dijagonali i iznad glavne dijagonale različiti od nule, dok su svi ostali članovi jednaki nuli, tj. $a_{ij} = 0$ za $i > j$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Matrica u kojoj su svi članovi na glavnoj dijagonali i ispod glavne dijagonale različiti od nule, tj. $a_{ij} = 0$ za $i < j$, jest donjotrokutna matrica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 5 & -2 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Pojasna (vrpčasta) matrica je matrica u kojoj su svi članovi različiti od nule smješteni na glavnoj dijagonali ili u blizini glavne dijagonale. Često se susreće simetrična pojasna matrica koja može biti oblika

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Ovo je pojasna simetrična matrica petog reda. Širinu pojasa određuje veličina $2m_A+1$ gdje je m_A broj zaposjednutih dijagonala uz glavnu dijagonalu. U slučaju (2.12), $m_A=1$, pa širina pojasa iznosi 3.

2.2. Elementarne operacije s matricama

2.2.1. Zbrajanje i oduzimanje matrica

Dvije matrice **A** i **B** mogu se zbrajati samo ako imaju jednaki broj redaka i stupaca, odnosno ako su istoga reda. Rezultat je jednak zbroju odgovarajućih članova, npr.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 3 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2{,}5 & 7 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Oduzimanje je analogno zbrajanju

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1{,}5 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Prilikom zbrajanja i oduzimanja nije bitan redoslijed operacija, tj. vrijedi

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})-(\mathbf{C}+\mathbf{D})=(\mathbf{A}-\mathbf{C})+(\mathbf{B}-\mathbf{D}). \tag{2.15}$$

Za zbrajanje vrijede zakoni komutacije

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{2.16}$$

i asocijacije

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}). \tag{2.17}$$

2.2.2. Množenje skalarom

Množenje matrice **A** skalarom k provodi se tako da se svi elementi matrice pomnože s tim skalarom

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

2.2.3. Množenje matrica

Množenje matrica **A** i **B** moguće je provesti samo ako prva matrica **A** ima onoliko stupaca koliko druga matrica **B** ima redaka. Prema tome, ako je **A** reda $m \times n$, a **B** je reda $p \times q$, umnožak $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ moguć je samo ako je $n = p$. Rezultirajuća matrica **C** bit će reda $m \times q$. Članovi matrice **C** jednaki su sumi umnoška članova i-tog retka matrice **A** i j-tog stupca matrice **B**, tj.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{2.19}$$

Na primjer, ako je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

na temelju (2.19) dobiva se

$$\begin{aligned} c_{11} &= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 14, \\ c_{12} &= 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 39, \\ c_{21} &= 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22, \\ c_{22} &= 4 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 48, \\ c_{31} &= 10 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 28, \\ c_{21} &= 10 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 70, \end{aligned}$$

iz čega slijedi rezultirajuća matrica **C**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 24 & 70 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Ako je dio matrice koja se množi zaposjednut s nulama, može se broj operacija znatno reducirati, što je na primjer slučaj s pojasnom matricom. Umnožak dviju matrica u općem slučaju nije komutativan, tj.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}\,, \tag{2.22}$$

što se može pokazati na sljedećem primjeru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = [3 \quad 4],$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [3 \quad 4] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{BA} = [3 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [11].$$

Ako je moguće načiniti umnožak matrica **AB,** u općem slučaju ne znači da je moguć umnožak **BA**. Pri množenju matrica vrijedi pravilo distribucije

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \\ &(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Također vrijedi zakon asocijacije

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})\,. \tag{2.25}$$

Ako je umnožak dviju matrica **AB** i **AC** moguć, i ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, u općem slučaju ne vrijedi jednakost $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Umnožak sa specijalnim matricama, npr. s jediničnom matricom **I** i nul-matricom **0**, jednak je

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}\,, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}\,. \tag{2.27}$$

Ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, u općem slučaju ne znači da je $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Potrebno je napomenuti da u matričnom računu ne postoji mogućnost dijeljenja matrica. Dijeljenje je zamijenjeno množenjem inverznom matricom. Inverzna matrica definirana je u odjeljku 2.2.9.

2.2.4. Transponiranje matrice

Transponirana matrica dobiva se zamjenom redaka i stupaca u matrici, a označuje se s gornjim indeksom T, npr. $\mathbf{A}^T$. Ako je $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ matrica reda $m \times n$, njezina je transponirana matrica $\mathbf{A}^T=\mathbf{B}$, gdje je $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ matrica reda $n \times m$ s članovima $b_{ij}=a_{ji}$, za $i=1...n$, $j=1...m$. Prema tome, za matricu

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

transponirana je matrica

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Ako je transponiranje provedeno dva puta, ponovno se dobiva početna matrica

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}. \tag{2.29}$$

Za simetričnu matricu vrijedi

$$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}. \tag{2.30}$$

Transponirani umnožak dviju matrica jednak je umnošku transponiranih matrica čija su mjesta zamijenjena

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{2.31}$$

Za transponiranje umnoška više matrica vrijedi

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B}\cdots\mathbf{Z})^T=\mathbf{Z}^T\cdots\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{2.32}$$

Umnožak simetrične matrice $\mathbf{A}$ s proizvoljnom matricom $\mathbf{B}$ u općem slučaju nije simetričan. Naprotiv, umnožak matrica $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ simetričan je ako je matrica $\mathbf{A}$ simetrična, što se može pokazati na sljedeći način:

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T=(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T(\mathbf{B}^T)^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B}. \tag{2.33}$$

Budući da je $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, izraz (2.33) postaje

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\,\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}\,\mathbf{B}, \tag{2.34}$$

što dokazuje simetričnost umnoška navedenih triju matrica.

2.2.5. Podjela matrice na submatrice

Kako bi se olakšalo računanje, matrice je moguće podijeliti na više submatrica koje sadrže članove iz odgovarajućih redaka i stupaca. To je moguće pokazati na sljedećem primjeru gdje su submatricama pridruženi članovi koji su odvojeni isprekidanim crtama

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc:c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Ovdje su matrice **A** i **B** podijeljene na četiri submatrice. Pri dijeljenju treba imati na umu da su moguće sve računske operacije među submatricama (zbrajanje, oduzimanje, množenje). Umnožak $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ jednak je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}, \\ \mathbf{C}_{12} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}, \\ \mathbf{C}_{21} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}, \\ \mathbf{C}_{22} &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.2.6. Diferenciranje i integriranje matrice

Diferenciranje i integriranje matrice provodi se tako da se derivira odnosno integrira svaki njezin član. Na primjer, ako matrica **A** sadrži članove koji su funkcija varijable x,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & . & . & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & . & . & a_{2n}(x) \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & . & . & a_{mn}(x) \end{bmatrix}, \tag{2.38}$$

njezina derivacija jednaka je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}x}=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}x} & . & . & \frac{\mathrm{d}a_{1n}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}x} & . & . & \frac{\mathrm{d}a_{2n}}{\mathrm{d}x} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ \frac{\mathrm{d}a_{m1}}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}a_{m2}}{\mathrm{d}x} & . & . & \frac{\mathrm{d}a_{mn}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Integral je jednak

$$\int_a^b \mathbf{A}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}\mathrm{d}x & \int_a^b a_{12}\mathrm{d}x & . & . & \int_a^b a_{1n}\mathrm{d}x \\ \int_a^b a_{21}\mathrm{d}x & \int_a^b a_{22}\mathrm{d}x & . & . & \int_a^b a_{2n}\mathrm{d}x \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ \int_a^b a_{m1}\mathrm{d}x & \int_a^b a_{m2}\mathrm{d}x & . & . & \int_a^b a_{mn}\mathrm{d}x \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

Prilikom integriranja umnoška matrica $\int \mathbf{AB}\,\mathrm{d}x$ ili $\int\int \mathbf{A}^T\mathbf{BA}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ najprije treba provesti množenje, a nakon toga integraciju.

2.2.7. Kvadratni oblik matrice

Kvadratni oblik konačnoga broja varijabli skalarna je veličina koju je moguće prikazati u matričnom zapisu

$$Q=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{x}\,, \tag{2.41}$$

gdje je $\mathbf{x}$ vektor n realnih varijabli

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n], \tag{2.42}$$

a $\mathbf{A}$ je simetrična matrica n-tog reda. Ako je $Q > 0$ za svaki $\mathbf{x}$ različit od nule, a jednak je nula samo za $\mathbf{x} = 0$, kvadratni oblik pozitivno je definitan, odnosno matrica $\mathbf{A}$ je pozitivno definitna. Ako je za svaki $\mathbf{x}$ različit od nule $Q \geq 0$, matrica $\mathbf{A}$ je pozitivno semidefinitna. Derivacija kvadratnog oblika, uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{A}$ neovisna o komponentama vektora $\mathbf{x}$, jednaka je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x}\right) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2.43}$$

U mehanici deformabilnih tijela pomoću kvadratnog oblika (2.41) moguće je prikazati energiju deformiranja elastičnoga sustava.

2.2.8. Determinanta matrice

Svakoj kvadratnoj matrici pridružena je njezina determinanta. Označuje se s $\det \mathbf{A}$ ili $|\mathbf{A}|$, a njezina veličina je skalar koji se izračunava pomoću relacije

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}, \tag{2.44}$$

gdje je $\mathbf{A}_{1j}$ kvadratna matrica reda $n-1$ koja se dobiva kad se izostavlja redak i stupac u matrici $\mathbf{A}$ koji sadrži član a_{1j}. Broj redaka, odnosno stupaca određuje red determinante. Ako je determinanta matrice jednaka nuli, matrica je singularna. Izračunavanje determinante korisno je pokazati na sljedećem primjeru. Determinanta matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

jednaka je

$$\det \mathbf{A} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^4 \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 8$$

Najveći red u matrici sadržane determinante koja je različita od nule, jednak je rangu matrice. Tako, na primjer, rang matrice $m \times n$ jednak je r ako matrica sadrži determinantu r-tog reda koja je različita od nule, a sve njezine determinante višeg reda jednake su nuli [120].

2.2.9. Inverzna matrica

Inverzna matrica kvadratne matrice **A** druga je kvadratna matrica označena s $\mathbf{A}^{-1}$ koja je definirana tako da je $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Inverzija kvadratne matrice ne može se dobiti uvijek. Ako matrica ne posjeduje inverznu matricu, ona je singularna, u protivnom kvadratna matrica je nesingularna, odnosno regularna. Ako je umnožak $\mathbf{AB}\cdots\mathbf{Z}$ moguć i matrice su nesingularne, onda vrijedi

$$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{Z})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.45}$$

Također vrijedi pravilo

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T. \tag{2.46}$$

Matrica je ortogonalna ako je inverzna kvadratna matrica jednaka transponiranoj matrici

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \tag{2.47}$$

Inverznu matricu moguće je izračunati dijeljenjem adjungirane matrice s njezinom determinantom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{\text{adj}}}{\det \mathbf{A}}. \tag{2.48}$$

Adjungirana matrica kvadratne matrice **A** transponirana je matrica čiji su članovi zamijenjeni pripadnim subdeterminantama. Na primjer, ako je zadana kvadratna matrica **A**, njezina adjungirana matrica izračunava se na sljedeći način:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\text{adj}} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -13 & 6 \\ -7 & 4 & 2 \\ -6 & 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Na temelju (2.44) determinanta je jednaka skalarnom umnošku između bilo kojega retka ili stupca u $\mathbf{A}^T$ i $\mathbf{A}_{\text{adj}}$. Ako uzmemo druge retke, dobiva se

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = -25.$$

Prema (2.47) inverzna matrica jednaka je

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{\text{adj}}}{\det \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{7}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ \frac{6}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}.$$

Osim ovdje prikazanog postupka, inverznu matricu moguće je izračunati primjenom numeričkih algoritama [91, 118].

2.2.10. Problem vlastitih vrijednosti

Razlikuje se opći i standardni problem vlastitih vrijednosti. Opći problem vlastitih vrijednosti prikazan je matričnom jednadžbom u obliku

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{x} = 0, \tag{2.49}$$

gdje su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice, λ je vlastita vrijednost, a $\mathbf{x}$ predstavlja vlastiti vektor. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{B}$ jednaka jediničnoj matrici, standardni je problem vlastitih vrijednosti

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0. \tag{2.50}$$

Iz uvjeta za netrivijalno rješenje sustava jednadžbi (2.50)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \tag{2.51}$$

izračunava se n vlastitih vrijednosti kvadratne matrice $\mathbf{A}$ n-tog reda. Relacija (2.51) je karakteristični polinom čiji je stupanj jednak redu matrice $\mathbf{A}$. Svakoj vlastitoj vrijednosti λ_i ($i = 1$ do n) odgovara vlastiti vektor $\mathbf{x}_i$ koji se izračunava uvrštavanjem λ_i u sustav jednadžbi (2.50).

Ako je kvadratna matrica $\mathbf{A}$ realna i simetrična, vlastite vrijednosti su realne veličine. Ako su sve vlastite vrijednosti pozitivne, matrica je pozitivno definitna. Ako je barem jedna vlastita vrijednost jednaka nuli, matrica je singularna. Za realnu i simetričnu matricu pripadni vlastiti vektori međusobno su okomiti, tj. vrijedi

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0 \text{, za } i \neq j \text{.} \tag{2.52}$$

Rabeći svojstvo okomitosti vlastitih vektora, simetričnu matricu moguće je prikazati u spektralnom obliku

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X}^T \text{,} \tag{2.53}$$

gdje je $\mathbf{X}$ matrica vlastitih vektora

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \text{,} \tag{2.54}$$

a $\boldsymbol{\Lambda}$ je dijagonalna matrica pripadnih vlastitih vrijednosti

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{.} \tag{2.55}$$

Izračunavanje vlastitih vrijednosti i pripadnih vlastitih vektora prikazano je u sljedećem primjeru. Ako je zadana kvadratna i simetrična matrica drugog reda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{,}$$

karakteristični polinom jednak je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \text{,}$$

čija su rješenja vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = 1$. Primjenom (2.50) dobiva se za λ_1 sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \text{,}$$

koje su međusobno zavisne. Iz jednadžbi se dobiva $x_1 = 2x_2$, pa je vlastiti vektor jednak

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normirani vlastiti vektor je

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analogno se za λ_2 izračunava

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pomoću (2.52) lako je pokazati da su izračunati vlastiti vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ međusobno okomiti.

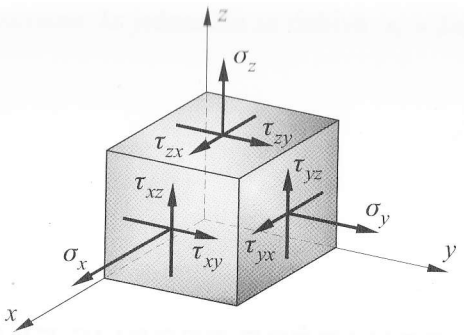
3. OSNOVNE JEDNADŽBE TEORIJE ELASTIČNOSTI

Za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela pomoću metode konačnih elemenata u elastičnom području, neophodne su osnovne relacije teorije elastičnosti. Te relacije obuhvaćaju uvjete ravnoteže, vezu između deformacije i pomaka te konstitutivne jednadžbe. Osim tih osnovnih jednadžbi, moraju biti zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti, zajedno s rubnim uvjetima sila i rubnim uvjetima pomaka. Ovdje će se prikazati relacije za rješavanje prostornih problema u trodimenzijskom Kartezijevu koordinatnom sustavu, kako bi se nakon toga razmatralo ravninsko stanje naprezanja i deformacije te rješavanje problema osnosimetrične deformacije u osnosimetričnim tijelima. Budući da će se, osim elemenata za dvodimenzijsku i trodimenzijsku analizu kontinuuma, u idućem izlaganju izvesti jednodimenzijski štapni elementi, kao i elementi za rješavanje problema ploča i ljusaka, potrebne su osnovne relacije za rješavanje problema štapnih nosača te tankostjenih pločastih i ljuskatih konstrukcija, koje se temelje na odgovarajućim pretpostavkama o deformiranju. Uz pretpostavku linearnog ponašanja materijala, daje se kratki prikaz spomenutih relacija zajedno s matričnom formulacijom koja je prikladna za izvođenje osnovnih jednadžbi u formulaciji konačnih elemenata. Detaljni izvod svih navedenih izraza može se naći u opsežnoj literaturi iz područja teorije elastičnosti, mehanike deformabilnih tijela te teorije ploča i ljusaka.

3.1. Jednadžbe za rješavanje prostornih problema teorije elastičnosti

3.1.1. Jednadžbe ravnoteže

Stanje naprezanja u nekoj točki kontinuuma potpuno je i jednoznačno opisano sa šest komponenata naprezanja, koje su u Kartezijevu koordinatnom sustavu prikazane na elementarnom volumenu prema slici 3.1.



Slika 3.1. Komponente tenzora naprezanja

Iz uvjeta ravnoteže sila izvode se sljedeće jednadžbe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+q_{vx}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+q_{vy}=0, \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+q_{vz}=0.$$

Iz jednadžbi momenata dobiva se

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}, \qquad (3.2)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

U relacijama (3.1), q_{vx}, q_{vy} i q_{vz} jesu komponente sila koje se odnose na jedinicu volumena. Kao što je uobičajeno u tehničkoj literaturi, dva jednaka indeksa uz normalne komponente naprezanja zamijenjena su s jednim indeksom, npr. $\sigma_x=\sigma_{xx}$. Primjenom indeksnog zapisivanja koje je detaljno opisano u [4, 6], jednadžbe ravnoteže (3.1) i (3.2) mogu se kraće prikazati

$$\sigma_{ij,i}+q_{vj}=0,$$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}. \qquad (3.3)$$

Prema Einsteinovu pravilu, tu se provodi zbrajanje po ponovljenim indeksima od 1 do 3 koji odgovaraju Kartezijevim koordinatama x, y i z. U skladu s tenzor-

skim zapisom vrijedi $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ za $i \neq j$. Ako se komponente naprezanja i volumenskih sila prikažu u obliku vektora

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} q_{vx} & q_{vy} & q_{vz} \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

uvjeti ravnoteže mogu se napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{vx} \\ q_{vy} \\ q_{vz} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

gdje ∂_x, ∂_y i ∂_z označuju parcijalne derivacije po Kartezijevim koordinatama

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.7}$$

Uvođenjem diferencijalnog operatora

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

uvjeti ravnoteže mogu se simbolički prikazati na sljedeći način

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}. \tag{3.9}$$

3.1.2. Veza između deformacije i pomaka. Kinematičke relacije

Deformiranje kontinuuma opisano je pomacima koji se određuju komponentama u, v i w u pravcu koordinatnih osi Kartezijeva koordinatnog sustava. U općem slučaju komponente pomaka funkcije su koordinata x, y, z. Tu se pretpostavljaju mali pomaci i male deformacije. Komponente tenzora deformacije određuju se deriviranjem komponenata pomaka

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3.10}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ako su komponente tenzora deformacije jednake nuli, pripadne funkcije pomaka opisuju gibanje krutoga tijela. Primjenom indeksnoga zapisivanja moguće je šest gornjih relacija zamijeniti jednim izrazom

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad i,j = 1,2,3, \tag{3.11}$$

gdje je $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ za $i \neq j$, a brojevi 1, 2 i 3 odgovaraju koordinatama x, y i z. Veličine u_1, u_2 i u_3 odgovaraju komponentama pomaka u, v i w. Kinematičke relacije (3.10) moguće je napisati u matričnom obliku na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Ako se komponente tenzora deformacije i pomaka prikažu u obliku vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

te uvođenjem kinematičkog diferencijalnog operatora

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

relacija (3.12) može se prikazati u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,. \tag{3.16}$$

Uspoređivanjem izraza (3.15) i (3.8) lako je pokazati da vrijedi jednakost

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_e^T\,. \tag{3.17}$$

3.1.3. Uvjeti kompatibilnosti

U prethodnom odjeljku pokazano je da se iz tri komponente pomaka izračunava šest komponenata tenzora deformacije. Stoga komponente tenzora deformacije ne smiju biti međusobno neovisne te moraju zadovoljavati sljedeće uvjete kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z},$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right), \tag{3.18}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right),$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right).$$

Relacije (3.18) moguće je prikazati u matričnom obliku

$$\mathbf{D}_c\,\boldsymbol{\varepsilon} = 0\,, \tag{3.19}$$

gdje je $\mathbf{D}_c$ diferencijalni operator uvjeta kompatibilnosti

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0 \\ \partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{zx} \\ 2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{zx} & \partial_{xx} & -\partial_{xy} \\ 0 & 2\partial_{xz} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{xy} & \partial_{yy} \\ 0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{xz} & -\partial_{yz} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Tu su zbog jednostavnosti dvostruke parcijalne derivacije kraće zapisane

$$\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,, \quad \partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,. \tag{3.21}$$

Uvjeti kompatibilnosti automatski su zadovoljeni ako su pomaci jednoznačne i kontinuirane funkcije. Primjenom indeksnog zapisivanja moguće je šest jednadžbi (3.18) zamijeniti jednom relacijom

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0\,. \tag{3.22}$$

Ovaj izraz daje 81 jednadžbu od kojih je samo 6 međusobno različitih.

3.1.4. Veza između naprezanja i deformacije. Konstitutivne jednadžbe

Veza između naprezanja i deformacije za linearno elastičan, homogen i izotropan materijal prikazana je pomoću relacija koje čine Hookeov zakon

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right],$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right],$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\,, \tag{3.23}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz},$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

gdje su Youngov modul elastičnosti E i Poissonov koeficijent ν dvije neovisne konstante materijala, a G je modul smicanja koji se može izračunati pomoću izraza

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{3.24}$$

Relacije (3.23) mogu se prikazati u matričnom obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.25}$$

gdje je $\mathbf{D}$ matrica elastičnosti. Njezini članovi različiti od nule ovise o elastičnim konstantama materijala

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Deformaciju je moguće prikazati eksplicitno pomoću izraza

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.27}$$

gdje je $\mathbf{D}^{-1}$ inverzna matrica elastičnosti

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Ako se razmatra utjecaj promjene temperature na proces deformiranja, potrebno je u relaciji (3.27) dodati komponente početnih deformacija koje ovise o koeficijentu toplinskog rastezanja materijala α_T i promjeni temperature ΔT

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^T = \alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Kao što se vidi, promjena temperature u izotropnim materijalima nema utjecaja na kutne deformacije. Ukupne deformacije jednake su

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0 . \tag{3.30}$$

Izraz za naprezanje sada postaje

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right). \tag{3.31}$$

Matrične formulacije (3.25) i (3.27) moguće je zamijeniti s indeksnim zapisom prema [4, 6]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} , \tag{3.32}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right], \tag{3.33}$$

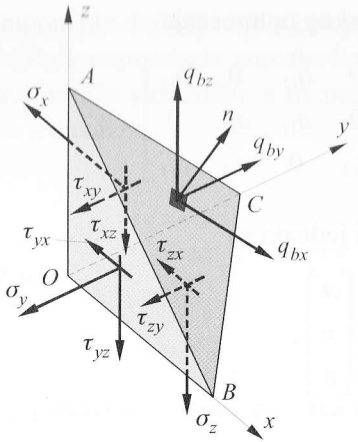
gdje su μ i λ Laméove konstante

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.34}$$

Veličina δ_{ij} je Kroneckerov simbol ($\delta_{ij} = 1$ za $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$).

3.1.5. Rubni uvjeti

Sve do sada prikazane relacije odnose se na pomake, deformacije i naprezanja unutar elastičnog tijela. Da bi se problem mehanike kontinuuma mogao riješiti, na površini razmatranog tijela moraju biti zadovoljeni odgovarajući rubni uvjeti. Razlikuju se prirodni rubni uvjeti ili rubni uvjeti sila i geometrijski rubni uvjeti ili rubni uvjeti pomaka. Rubni uvjeti sila su relacije koje je potrebno zadovoljiti ako je na površini tijela zadano odgovarajuće opterećenje. Pritom vanjske površinske sile moraju biti u ravnoteži s naprezanjima u tijelu duž opterećene plohe. Na slici 3.2. prikazan je elementarni tetraedar na čijoj plohi ABC djeluju sile po jedinici površine s komponentama q_{bx}, q_{by} i q_{bz} u pravcu koordinatnih osi. Te komponente moraju biti u ravnoteži s naprezanjima koja se odnose na ostale tri plohe tetraedra.



Slika 3.2. Prikaz površinskog opterećenja i komponenata naprezanja

Iz uvjeta ravnoteže elementarnog tetraedra izvode se relacije

$$q_{bx} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\tau_{yx} + a_{13}\tau_{zx},$$

$$q_{by} = a_{11}\tau_{xy} + a_{12}\sigma_y + a_{13}\tau_{zy}, \tag{3.35}$$

$$q_{bz} = a_{11}\tau_{xz} + a_{12}\tau_{yz} + a_{13}\sigma_z,$$

koje čine prirodne rubne uvjete ili rubne uvjete sila. Veličine a_{11}, a_{12} i a_{13} kosinusi su smjera vanjske normale n na plohi ABC, a jednake su kosinusu kutova između normale i koordinatnih osi x, y i z. Relacije (3.35) moguće je prikazati u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} q_{bx} \\ q_{by} \\ q_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

ili simbolički

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}, \tag{3.37}$$

gdje je $\mathbf{q}_b$ vektor površinskog opterećenja

$$\mathbf{q}_b^T = \begin{bmatrix} q_{bx} & q_{by} & q_{bz} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

a $\mathbf{R}_q$ je operator površinskog opterećenja

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{11} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Geometrijski rubni uvjeti jednaki su

$$\begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

ili

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}, \tag{3.41}$$

gdje je $\mathbf{u}_b$ vektor pomaka na rubu razmatranog tijela, a $\mathbf{R}_u$ je operator rubnih pomaka

$$\mathbf{u}_b^T = \begin{bmatrix} u_b & v_b & w_b \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Rubni su uvjeti sila i pomaka u indeksnom zapisu

$$q_{bj} = \sigma_{ij} n_i, \tag{3.44}$$

$$u_{bi} = \delta_{ik} u_k. \tag{3.45}$$

U relaciji (3.44) n_i označuje komponentu jediničnog vektora normale na plohu u pravcu koordinatnih osi x, y i z Kartezijeva koordinatnog sustava, slika 3.2.

3.1.6. Rješavanje prostornih problema teorije elastičnosti

Problem teorije elastičnosti rješava se pomoću relacija prikazanih u prethodnim odjeljcima. Jednadžbe ravnoteže, relacije koje povezuju deformaciju i pomak, te konstitutivne jednadžbe, čine sustav od 15 neovisnih jednadžbi s 15 nepoznatih komponenata. Osim spomenutih izraza, moraju biti zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti te rubni uvjeti sila i rubni uvjeti pomaka. U pravilu se sustav od 15 jednadžbi primjenom odgovarajućih transformacija svodi na sustave s manjim brojem nepoznanica. Na taj način moguće je pomoću konstitutivnih jednadžbi i

relacija koje povezuju komponente deformacije s komponentama pomaka, uvjete ravnoteže prikazati pomoću komponenata pomaka kao što je prikazano u sljedećem izrazu (3.46). Rezultirajuće jednadžbe s tri nepoznate komponente pomaka nazivaju se Laméove jednadžbe

$$\begin{aligned} -\mathbf{q} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k\mathbf{u} \\ \hline -\mathbf{q} &= \mathbf{D}_e\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}_k\,\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Rubni uvjeti sila također se prikazuju pomoću pomaka na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_b &= \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k\mathbf{u} \\ \hline \mathbf{q}_b &= \mathbf{R}_q\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}_k\,\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Rubni uvjeti pomaka opisani su matričnom relacijom (3.41). Potrebno je napomenuti da u Laméovim jednadžbama nisu obuhvaćeni uvjeti kompatibilnosti. Ako su rješenja za pomake jednoznačne i kontinuirane funkcije, spomenuti uvjeti kompatibilnosti su zadovoljeni.

Za razliku od točnog rješenja koje daje teorija elastičnosti, pomoću metode konačnih elemenata dolazi se do približnog rješenja. Naime, uz jednoznačne i kontinuirane funkcije pomaka, uvjeti ravnoteže unutar tijela i rubni uvjeti sila u općem slučaju približno su zadovoljeni.

3.2. Ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije

Ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije posebni su slučajevi trodimenzijskoga stanja naprezanja. Problem ravninskoga stanja naprezanja najčešće se pojavljuje u tijelima kad im je dimenzija u pravcu jedne koordinatne osi mnogo manja od dimenzija u pravcu ostalih koordinata. Ako tijelo leži u ravnini xy, a dimenzija u pravcu osi z mnogo je manja od ostalih dimenzija, ravninsko stanje naprezanja nastaje kad opterećenje djeluje u ravnini tijela, jednoliko je raspodijeljeno po debljini i funkcija je samo koordinata x i y (slika 3.3a). Na slici su opterećenja q_x, q_y i q_b jednoliko raspodijeljena po debljini

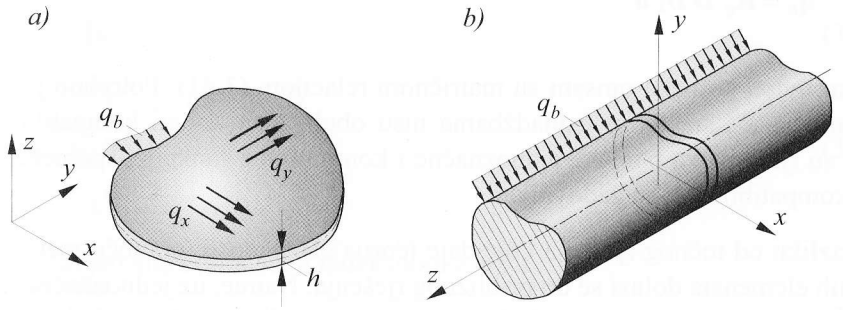
ploče. U tom slučaju komponente naprezanja σ_z, τ_{yz} i τ_{zx} jednake su nuli, a ostale komponente naprezanja σ_x, σ_y i τ_{xy} te pripadne komponente tenzora deformacije ε_x, ε_y i γ_{xy} funkcije su koordinata x i y. Komponente naprezanja i deformacije prikazuju se u obliku

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Matrica elastičnosti jednaka je

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$



Slika 3.3. a) ravninsko stanje naprezanja, b) ravninsko stanje deformacije

Problem ravninskoga stanja deformacije može se pojaviti kad je dimenzija tijela u pravcu jedne koordinate znatno veća od ostalih dimenzija. Ako je os z uzdužna os tijela, opterećenje djeluje okomito na os i ne mijenja se po duljini tijela, te ako je geometrija po duljini konstantna, uz rubne uvjete iz kojih slijedi $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, u tijelu vlada ravninsko stanje deformacije, slika 3.3b. Komponente naprezanja i deformacije jednake su kao i pri ravninskom stanju naprezanja, a jedina razlika je u matrici elastičnosti koja sada ima oblik

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Komponente deformacije za ravninsko stanje naprezanja i za ravninsko stanje deformacije izračunavaju se pomoću iste kinematičke relacije $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ gdje je kinematički diferencijalni operator jednak

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \tag{3.52}$$

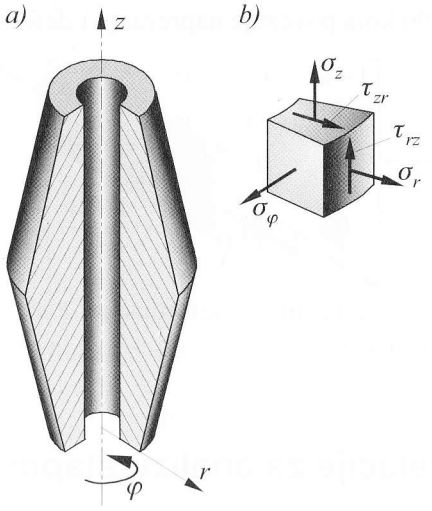
a vektor pomaka opisan je s dvije komponente u pravcu koordinatnih osi x i y

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Potrebno je napomenuti da je za slučaj ravninskoga stanja naprezanja komponenta deformacije ε_z različita od nule. Jednako tako pri ravninskom stanju deformacije u općem slučaju komponenta naprezanja σ_z nije jednaka nuli. Spomenute veličine ne uzimaju se u razmatranje jer ne pridonose energiji elastičnoga deformiranja zato što je i u jednom i u drugom slučaju produkt $\sigma_z \varepsilon_z$ jednak nuli.

3.3. Osnosimetrična tijela opterećena osnosimetrično

Osnosimetrična tijela opterećena osnosimetrično također se mogu razmatrati kao dvodimenzijski problem. Pritom se Kartezijev koordinatni sustav zamjenjuje cilindričnim koordinatama (r, φ, z), slika 3.4a.



Slika 3.4. Osnosimetrično tijelo

Isto kao pri ravninskom stanju naprezanja i ravninskom stanju deformacije, polje pomaka opisano je s dvije komponente

$$\mathbf{u}^T = [u_r \quad w], \tag{3.54}$$

gdje je u_r komponenta pomaka u radijalnom smjeru, a w je pomak u pravcu osi simetrije. Tangencijalna komponenta pomaka u pravcu koordinate φ jednaka je nuli. Pomaci u_r i w funkcije su samo koordinata r i z, odnosno ne mijenjaju se s koordinatom φ. Tenzor deformacije sastoji se od četiri komponente

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\varphi \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}], \tag{3.55}$$

koje se izračunavaju pomoću kinematičkih relacija

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}:$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r & 0 \\ \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & \partial_z \\ \partial_z & \partial_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ w \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

Komponente naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_r \quad \sigma_\varphi \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}] \tag{3.57}$$

prikazane su na elementarnom volumenu na slici 3.4b. Matrica elastičnosti u konstitutivnoj jednadžbi koja povezuje naprezanje i deformaciju jednaka je

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.58}$$

Lako je zaključiti da su naprezanja i deformacije, kao i komponente pomaka, funkcije samo koordinata r i z.

3.4. Osnovne relacije za analizu štapnih nosača

Štapovi su konstrukcijski elementi čija je geometrija definirana duljinom i površinom poprečnoga presjeka. Poprečne dimenzije mnogo su manje od duljine

štapa, što omogućuje uvođenje odgovarajućih pretpostavki o deformiranju na temelju kojih se izvode relacije za analizu naprezanja i deformacije [3]. U općem slučaju štapne konstrukcije opterećene su uzdužnim i poprečnim silama koje djeluju u pravcu uzdužne osi i okomito na os, te momentima savijanja i uvijanja. Štapovi opterećeni poprečnim silama i momentima savijanja u literaturi se često nazivaju gredama, te će se i ovdje konačni elemeti za njihovu analizu nazivati grednim elementima.

Zbog jednostavnosti, u daljnjem izlaganju prikazat će se osnovne relacije odvojeno za posebne slučajeve opterećenja. Utjecaj promjene temperature na deformiranje štapa neće se razmatrati. Primijenit će se operatorski i matrični zapis uz korištenje simbola uvedenih u prethodnim odjeljcima.

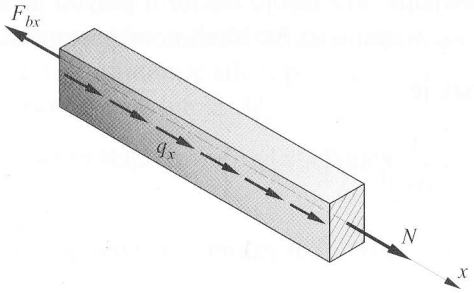
3.4.1. Osno opterećenje štapa

Štap je osno opterećen kad vanjske sile ili rezultante vanjskih sila prolaze kroz težište presjeka na kojima djeluju i usmjerene su u pravcu uzdužne osi. Razmatranjem ravnoteže elementa osno opterećenoga štapa prema slici 3.5. dobiva se uvjet ravnoteže

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -q_x\,, \tag{3.59}$$

koji se može simbolički prikazati istom relacijom kao i u prostornim problemima teorije elastičnosti

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}\,. \tag{3.60}$$



Slika 3.5. Osno opterećeni štap

Ovdje matrica diferencijalnog operatora sadrži samo jedan član, tj. prvu derivaciju po x

$$\mathbf{D}_e = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]. \tag{3.61}$$

Uzdužna sila N i kontinuirano opterećenje po jedinici duljine q_x članovi su vektora $\boldsymbol{\sigma}$ i $\mathbf{q}$

$$\boldsymbol{\sigma} = [N], \tag{3.62}$$

$$\mathbf{q} = [q_x]. \tag{3.63}$$

Veza između deformacije i pomaka jednaka je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad [\varepsilon_x] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right][u]. \tag{3.64}$$

Konstitutivna jednadžba može se prikazati u obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad [N] = [EA][\varepsilon_x], \tag{3.65}$$

gdje matricu elastičnosti čini jedan član koji je jednak produktu modula elastičnosti i površine poprečnoga presjeka štapa. Rubni uvjeti sila i pomaka jednaki su

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}: \quad [F_{bx}] = [1][N], \tag{3.66}$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}: \quad [u_b] = [1][u], \tag{3.67}$$

gdje je F_{bx} zadano osno opterećenje na kraju štapa, a u_b zadani je pomak.

3.4.2. Uvijanje štapa

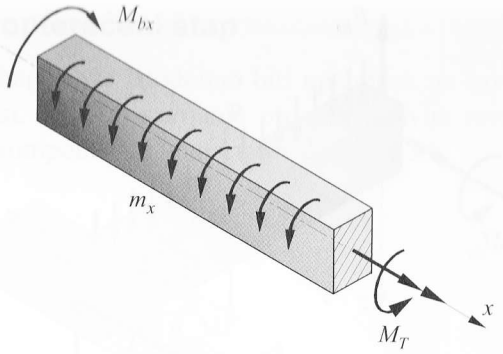
Ako je štap opterećen na uvijanje, unutarnje sile u poprečnim presjecima reduciraju se na moment uvijanja M_T čiji je vektor u pravcu uzdužne osi štapa, slika 3.6. Deformiranje je razmatrano uz St. Venantove pretpostavke [4].

Uvjet ravnoteže jednak je

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}: \quad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right][M_T] = -[m_x]. \tag{3.68}$$

U kinematičkoj relaciji relativni kut zakreta ϑ_x izračunava se deriviranjem kuta zakreta φ_x

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad [\vartheta_x] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right][\varphi_x]. \tag{3.69}$$



Slika 3.6. Štap opterećen na uvijanje

Konstitutivna jednadžba povezuje relativni kut zakreta i moment uvijanja

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}: \qquad [M_T] = [GI_T][\vartheta_x], \tag{3.70}$$

gdje je G modul smicanja, a I_T torzijski moment tromosti. Rubni uvjeti sila $\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma}$ i pomaka $\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u\mathbf{u}$ mogu se napisati u obliku

$$[M_{bx}] = [1][M_T], \tag{3.71}$$

$$[\varphi_{bx}] = [1][\varphi_x], \tag{3.72}$$

gdje je M_{bx} zadani moment uvijanja, a φ_{bx} zadani je kut zakreta na rubu štapa.

3.4.3. Savijanje štapa

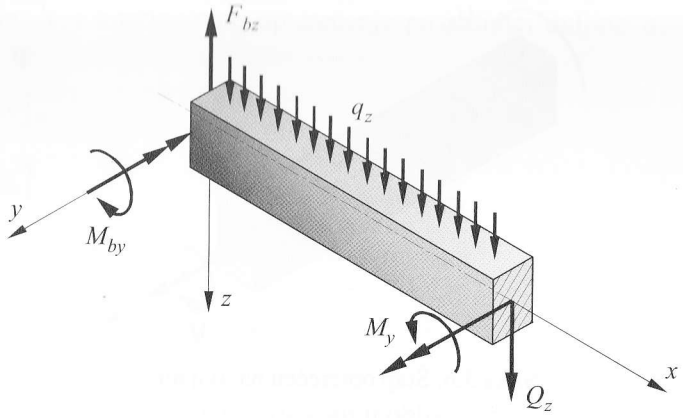
Ovdje prikazane relacije za rješavanje problema savijanja tankog štapa izvedene su uz Bernoullijeve pretpostavke o deformiranju [3]. Ako je štap opterećen u ravnini xz, prema slici 3.7., unutarnje sile u poprečnim presjecima reduciraju se na poprečnu silu Q_z i moment savijanja M_y.

Iz uvjeta ravnoteže elementa štapa izvode se sljedeće relacije

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = Q_z, \tag{3.73}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M_y}{\mathrm{d}x^2} = -q_z. \tag{3.74}$$

Gornje relacije pokazuju da su poprečna sila i moment savijanja međusobno zavisne varijable. Uvjet ravnoteže (3.74) može se prikazati u matričnom obliku



Slika 3.7. Štap opterećen na savijanje

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}: \qquad \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]\left[M_y\right] = -\left[q_z\right], \tag{3.75}$$

gdje je M_y neovisna varijabla. Kinematička relacija opisuje vezu između progiba i zakrivljenosti elastične crte štapa κ_y

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{u}: \qquad \left[\kappa_y\right] = \left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right]\left[w\right]. \tag{3.76}$$

Konstitutivna jednadžba jednaka je

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}: \qquad \left[M_y\right] = \left[EI_y\right]\left[\kappa_y\right], \tag{3.77}$$

gdje je I_y moment tromosti oko osi y. Ako na rubu djeluje poprečna sila F_{bz} i moment savijanja M_{by}, slika 3.7., rubni uvjeti su

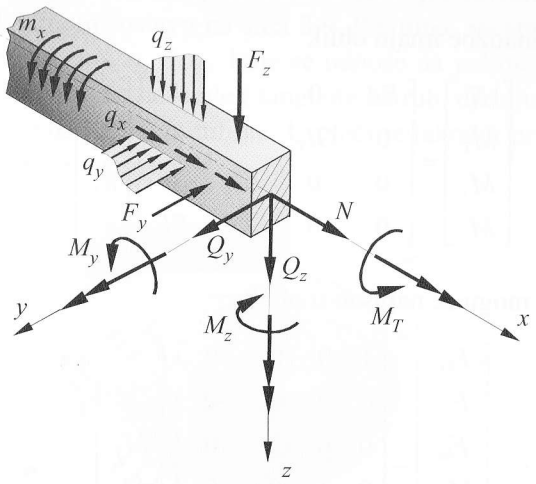
$$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma}: \qquad \begin{bmatrix} F_{bz} \\ M_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 1 \end{bmatrix}\left[M_y\right]. \tag{3.78}$$

Ako je na kraju štapa zadan pomak w_b i kut zakreta φ_{by}, rubni uvjeti pomaka jednaki su

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u\mathbf{u}: \qquad \begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}\left[w\right]. \tag{3.79}$$

3.4.4. Složeno opterećeni štap

U općem slučaju štap može istodobno biti opterećen na savijanje, uvijanje i u pravcu uzdužne osi. Ako se savijanje provodi u dvije ravnine, u poprečnim presjecima je šest komponenata unutarnjih sila, slika 3.8.



Slika 3.8. Složeno opterećeni štap

Osnovne relacije teorije elastičnosti dobivaju se superpozicijom posebnih slučajeva opterećenja prikazanih u prethodnim odjeljcima. Uvjet ravnoteže može se napisati u obliku

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}: \quad \begin{bmatrix} \mathrm{d}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{d}_x^2 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}_x^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{d}_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_T \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_x \end{bmatrix}, \tag{3.80}$$

gdje je $\mathrm{d}_x = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, a $\mathrm{d}_x^2 = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. Kao što se vidi, neovisne su veličine četiri komponente unutarnjih sila. Poprečne sile Q_y i Q_z određuju se deriviranjem momenata savijanja M_y i M_z

$$\begin{aligned} Q_z &= \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}, \\ Q_y &= -\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Kinematičke relacije su

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \vartheta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}_x \\ 0 & 0 & -\mathrm{d}_x^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{d}_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}. \tag{3.82}$$

Konstitutivne jednadžbe imaju oblik

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} N \\ M_T \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GI_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \vartheta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}. \tag{3.83}$$

Rubni uvjeti sila mogu se napisati u obliku

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\,\boldsymbol{\sigma}: \quad \begin{bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \\ F_{bz} \\ M_{bx} \\ M_{by} \\ M_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{d}_x \\ 0 & 0 & \mathrm{d}_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_T \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

Rubni su uvjeti pomaka jednaki

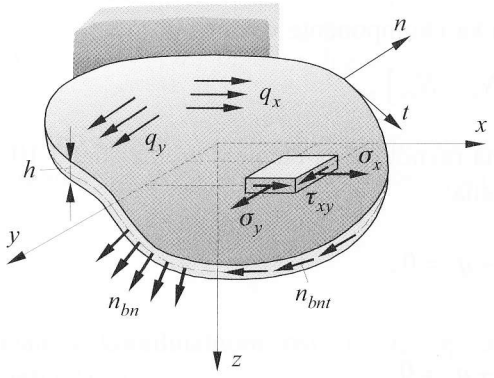
$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u\,\mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \\ \varphi_{bx} \\ \varphi_{by} \\ \varphi_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{d}_x & 0 \\ 0 & \mathrm{d}_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

3.5. Ploča opterećena u srednjoj ravnini

Ploča je konstrukcijski element koji čini dio kontinuuma omeđen dvjema plohama čija je međusobna udaljenost mala u odnosu na ostale dimenzije. Razmak između ploha određuje debljinu ploče, a srednja ploha koja debljinu raspolavlja je ravnina. Ovdje se pretpostavlja da je debljina ploče konstantna i mnogo manja od ostalih dimenzija ($h/\ell << 1$, gdje je h debljina, a ℓ je najmanja dimenzi-

ja ploče u njezinoj ravnini). Ako opterećenje djeluje u srednjoj ravnini, u ploči vlada ravninsko stanje naprezanja koje je jednoliko raspodijeljeno po debljini. U srednjoj ravnini ploče izračunavaju se unutarnje sile koje se odnose na jedinicu duljine.

Tanka ploča proizvoljna oblika opterećena u srednjoj ravnini prikazana je u Kartezijevu koordinatnom sustavu na slici 3.9. Ravnina xy srednja je ravnina s komponentama opterećenja q_x i q_y koje se odnose na jedinicu srednje površine. Duž ruba ploče, u pravcu normale i tangente na rub, djeluju vanjske sile n_{bn} i n_{bnt} koje se odnose na jedinicu duljine. U ploči je također prikazan element s ucrtanim komponentama naprezanja.



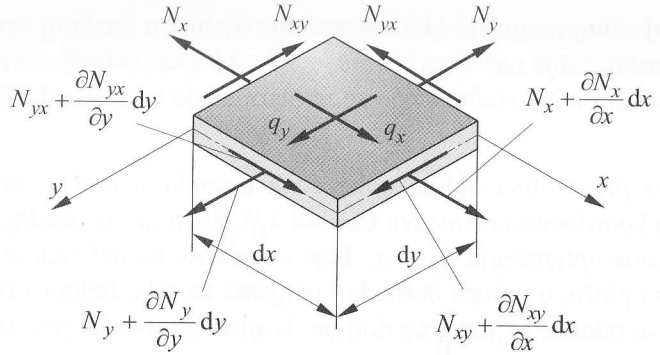
Slika 3.9. Ploča opterećena u srednjoj ravnini

Komponente unutarnjih sila izračunavaju se integriranjem komponenata naprezanja po debljini ploče. Budući da su komponente naprezanja po debljini ploče konstantne, unutarnje sile su jednake

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \mathrm{d}z = \sigma_x h ,$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \mathrm{d}z = \sigma_y h , \qquad (3.86)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \mathrm{d}z = \tau_{xy} h ,$$



Slika 3.10. Unutarnje sile na elementu ploče

a mogu se prikazati kao komponente vektora $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

Postavljanjem uvjeta ravnoteže za element prema slici 3.10. dobivaju se sljedeće dvije jednadžbe sila:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y = 0. \tag{3.89}$$

Iz jednadžbe momenata izvodi se poznati uvjet jednakosti posmičnih sila

$$N_{xy} = N_{yx}. \tag{3.90}$$

Relacije (3.88) i (3.89), na temelju uvjeta (3.90), mogu se napisati u poznatom matričnom obliku

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}: \quad \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}. \tag{3.91}$$

Polje pomaka opisano je komponentama u pravcu koordinata x i y

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}. \tag{3.92}$$

Komponente deformacije

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

izračunavaju se pomoću kinematičkih relacija

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{3.94}$$

Budući da se pretpostavlja ravninsko stanje naprezanja, matrica elastičnosti jednaka je relaciji (3.50). Veza između unutarnjih sila i komponenata deformacije jednaka je

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.95}$$

Ako na rubu ploče djeluju vanjske sile n_{bn} i n_{bnt}, one moraju biti u ravnoteži s unutarnjim komponentama sila N_n i N_{nt} u pravcu normale i tangente na rub

$$\begin{bmatrix} n_{bn} \\ n_{bnt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_n \\ N_{nt} \end{bmatrix}. \tag{3.96}$$

Ako je rub paralelan s koordinatnom osi y, tj. opisan je koordinatom $x = \text{konst.}$, rubni uvjeti sila su

$$\begin{bmatrix} n_{bx} \\ n_{bxy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.97}$$

što je u skladu s matričnom formulacijom $\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}$.

Uz zadane komponente pomaka u_{bn} i u_{bt}, rubni uvjeti pomaka jesu

$$\begin{bmatrix} u_{bn} \\ u_{bt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_t \end{bmatrix}. \tag{3.98}$$

Za rub $x = \text{konst.}$ uz zadani vektor pomaka s komponentama u pravcu osi x i y

$$\mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} u_b & v_b \end{bmatrix}, \tag{3.99}$$

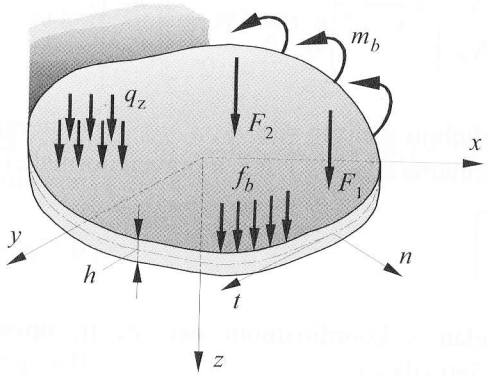
rubni uvjeti mogu se napisati u poznatom obliku

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{3.100}$$

Analitičko rješavanje ovdje prikazanog problema tankostjene ploče provodi se rješavanjem diferencijalne jednadžbe koja se izvodi na način opisan u odjeljku 3.1.6. Komponente naprezanja često se prikazuju pomoću Airyjeve funkcije što problem svodi na rješavanje biharmonijske diferencijalne jednadžbe [4, 72].

3.6. Savijanje ploče

Pretpostavlja se da je ploča proizvoljna oblika opterećena okomito na srednju ravninu te da duž ruba djeluju raspodijeljeni momenti savijanja i poprečne sile, prema slici 3.11. Kartezijeve koordinatne osi x i y leže u srednjoj ravnini ploče.



Slika 3.11. Poprečno opterećena ploča

Prilikom deformiranja srednja ravnina ploče prelazi u zakrivljenu srednju plohu koja je u Kartezijevu koordinatnom sustavu opisana pomakom u pravcu osi z koji je funkcija koordinata x i y

$$w = w(x, y). \tag{3.101}$$

Ovdje će se prikazati osnovne relacije koje se odnose na Kirchhoff-Loveovu ili klasičnu teoriju tankih ploča, a temelje se na sljedećim pretpostavkama:

- debljina je mala u odnosu na ostale dimenzije,
- progib ploče mali je u usporedbi s debljinom, a nagib deformirane srednje plohe mali je u odnosu na jedinicu,
- nakon deformiranja normale na srednju plohu, ostaju ravne i okomite uz nepromijenjenu duljinu,
- deformacija u ravnini srednje plohe jednaka je nuli,
- materijal je linearno elastičan, homogen i izotropan.

Komponente deformacije u materijalnoj točki koja je od srednje plohe udaljena za iznos koordinate z jednake su [49]

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3.102}$$

$$\gamma_{yx} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

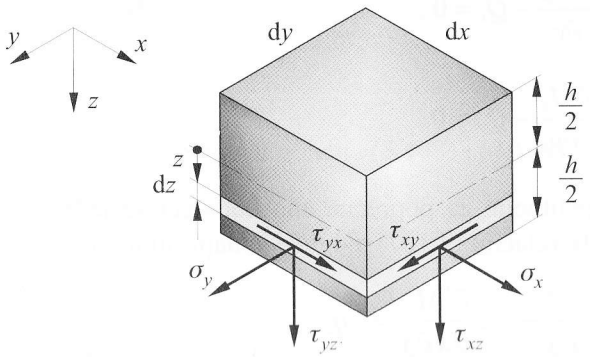
a ostale komponente ε_z, γ_{yz} i γ_{zx} jednake su nuli. Pripadne komponente naprezanja izračunavaju se pomoću Hookeova zakona za ravninsko stanje naprezanja

$$\sigma_x = -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y = -\frac{E z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{3.103}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E z}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Komponente naprezanja prikazane su na elementarnom volumenu na slici 3.12. Komponente naprezanja τ_{xz} i τ_{yz} različite su od nule, a nije ih moguće izračunati pomoću konstitutivnih relacija. Lako je zaključiti da je uz navedene pretpostavke ravninsko stanje naprezanja u elementarnom sloju pločastoga kontinuuma približno ispunjeno.



Slika 3.12. Komponente tenzora naprezanja na elementarnom volumenu ploče

Unutarnje veličine koje pridonose energiji elastičnoga deformiranja momenti su savijanja i uvijanja koji se izračunavaju integriranjem komponenata tenzora naprezanja po debljini ploče. Momenti savijanja jednaki su

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz , \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz . \tag{3.104}$$

Moment uvijanja prikazan je relacijom

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz . \tag{3.105}$$

Poprečne sile Q_x i Q_y definiraju se pomoću sljedećih integrala:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz , \qquad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \, dz . \tag{3.106}$$

Budući da su posmične komponente deformacije γ_{xz} i γ_{yz} jednake nuli, unutarnje veličine (3.106) ne pridonose energiji elastičnoga deformiranja.

Veličine definirane relacijama (3.104) do (3.106) odnose se na jedinicu duljine, a njihovi pozitivni smjerovi prikazani su na slici 3.13. Postavljanjem uvjeta ravnoteže za element prema slici dobivaju se sljedeće relacije:

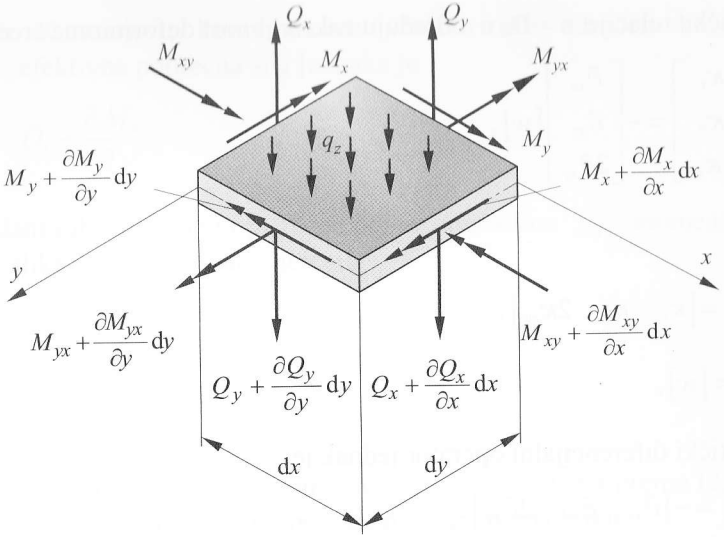
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 , \tag{3.107}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 , \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 . \tag{3.109}$$

Uvođenjem supstitucije za poprečne sile koristeći se jednadžbama momenata (3.108) i (3.109), relaciju (3.107) moguće je napisati u obliku

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q_z . \tag{3.110}$$



Slika 3.13. Unutarnje veličine na elementu ploče

Uvjet ravnoteže (3.110), prikazan u obliku $\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}$, jednak je

$$\begin{bmatrix} \partial_{xx} & \partial_{yy} & 2\partial_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_z \end{bmatrix}, \tag{3.111}$$

gdje je diferencijalni operator

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \partial_{xx} & \partial_{yy} & 2\partial_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Neovisne komponente unutarnjih veličina i vanjsko opterećenje prikazani su u obliku vektora

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.113}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_z \end{bmatrix}. \tag{3.114}$$

Poprečne sile izračunavaju se pomoću relacija (3.108) i (3.109)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}. \tag{3.115}$$

Kinematičke relacije $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ određuju zakrivljenost deformirane srednje plohe

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \partial_{xx} \\ \partial_{yy} \\ 2\partial_{xy} \end{bmatrix} [w], \tag{3.116}$$

gdje je

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad 2\kappa_{xy}], \tag{3.117}$$

$$\mathbf{u} = [w], \tag{3.118}$$

a kinematički diferencijalni operator jednak je

$$\mathbf{D}_k^T = -[\partial_{xx} \quad \partial_{yy} \quad 2\partial_{xy}]. \tag{3.119}$$

Veličine κ_x i κ_y zakrivljenosti su u smjeru osi x, odnosno y, a κ_{xy} je uvijenost elementa ploče. Uvrštavanjem izraza za komponente naprezanja (3.103) u relacije (3.104) i (3.105), izvode se konstitutivne jednadžbe koje čine vezu između unutarnjih veličina i komponenata tenzora zakrivljenosti deformirane srednje plohe

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.120}$$

iz čega slijedi matrica elastičnosti u obliku

$$\mathbf{D} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.121}$$

Rubni uvjeti sila na rubu na kojemu je definiran vektor normale $\mathbf{n}$ i tangente $\mathbf{t}$, opisani su momentima savijanja M_n i efektivnim ili Kirchhoffovim poprečnim silama $\overline{Q_n}$. U efektivnim poprečnim silama superponirani su poprečna sila Q_n i moment uvijanja M_{nt} [49]

$$\overline{Q_n} = Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t}. \tag{3.122}$$

Ako je u Kartezijevu koordinatnom sustavu rub određen koordinatom $x = \text{konst.}$, efektivna poprečna sila jednaka je

$$\overline{Q_x} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \tag{3.123}$$

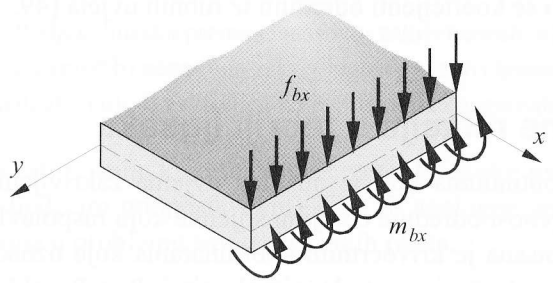
Ako je zadani rub slobodan i opterećen poprečnom silom f_{bx} i momentom savijanja m_{bx}, slika 3.14., rubni su uvjeti sila

$$f_{bx} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$

$$m_{bx} = M_x. \tag{3.124}$$

Nakon što se poprečna sila zamijeni s neovisnim veličinama prema (3.115), relacije (3.124) mogu se prikazati u poznatom matričnom obliku

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}: \quad \begin{bmatrix} f_{bx} \\ m_{bx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 2\partial_y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.125}$$



Slika 3.14. Sile i momenti na rubu ploče

Rubni uvjeti pomaka jednaki su

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_{bn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\partial_n \end{bmatrix} [w], \tag{3.126}$$

gdje je w_b zadani pomak, φ_{bn} je kut zakreta na rubu čija je normala opisana vektorom $\mathbf{n}$, a $\partial_n = \dfrac{\partial}{\partial n}$ je derivacija u smjeru normale. Lako je zaključiti da za rub $x = \text{konst.}$ vrijedi relacija

$$\begin{bmatrix} w_b \\ \varphi_{bx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\partial_x \end{bmatrix} [w]. \tag{3.127}$$

Analitičko rješavanje problema savijanja ploče svodi se na rješavanje diferencijalne jednadžbe

$$-\mathbf{q} = \mathbf{D}_e \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u}, \tag{3.128}$$

koja se izvodi na način opisan u poglavlju 3.1.6. Nakon što se provede deriviranje, matrična relacija (3.128) transformira se u linearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu 4. reda, koja je poznata u klasičnoj teoriji ploča

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D}, \tag{3.129}$$

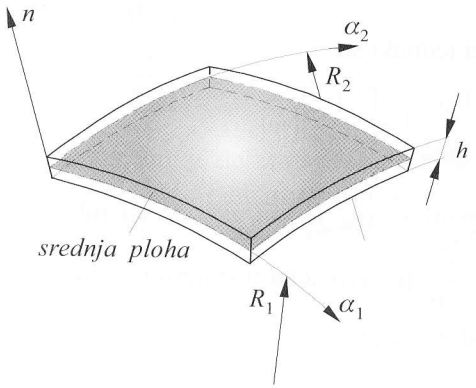
gdje je D fleksijska krutost ploče

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{3.130}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe najčešće se pretpostavlja u obliku trigonometrijskih redova čiji se koeficijenti određuju iz rubnih uvjeta [49, 111].

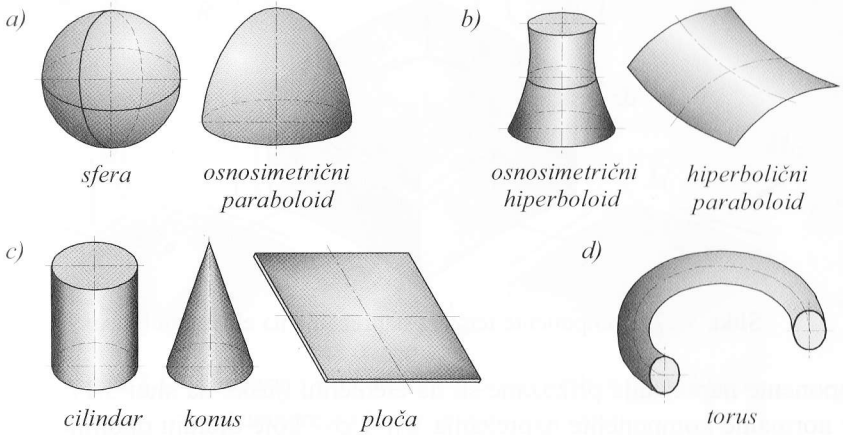
3.7. Osnovne relacije u teoriji ljusaka

Ljuska je dio kontinuuma koji je omeđen dvjema zakrivljenim plohama čija međusobna udaljenost određuje debljinu stijenke koju raspolavlja srednja ploha. Srednja ploha opisana je krivocrtnim koordinatama koje označuju crte glavnih zakrivljenosti, a pridruženi su im glavni polumjeri R_1 i R_2, slika 3.15.



Slika 3.15. Ljuskasti kontinuum

Produkt glavnih zakrivljenosti $\frac{1}{R_1 R_2}$ Gaussova je zakrivljenost prema kojoj se provodi podjela na ljuske s pozitivnom i negativnom zakrivljenošću, te na one za koje je Gaussova zakrivljenost jednaka nuli, slika 3.16. Torusna ljuska pokazuje da Gaussova zakrivljenost kod jedne te iste konstrukcije može biti na jednom dijelu pozitivna, a na drugomu negativna. Ploča se može smatrati posebnim slučajem ljuskaste konstrukcije s nultom Gaussovom zakrivljenošću.



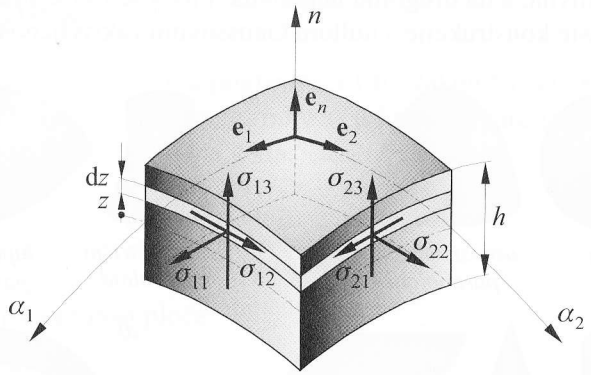
Slika 3.16. Podjela ljusaka prema Gaussovoj zakrivljenosti: a) pozitivna zakrivljenost b) negativna zakrivljenost c) zakrivljenost je jednaka nuli d) zakrivljenost je pozitivna i negativna

Ovdje će se prikazati relacije koje se odnose na tanke ljuske proizvoljna oblika, a temelje se na sljedećim pretpostavkama koje su analogne prethodno navedenim pretpostavkama u problemu savijanja tankih ploča:

- normale na srednju plohu nakon deformiranja ostaju ravne i okomite uz nepromijenjenu duljinu (Kirchhoff-Loveova hipoteza),
- debljina stijenke mala je u odnosu na polumjere zakrivljenosti $\left(\frac{h}{R} << 1\right)$,
- debljina stijenke konstantna je ili se neznatno mijenja $\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} \leq \frac{h}{R} << 1\right)$,
- naprezanje u pravcu normale na srednju plohu zanemaruje se u odnosu na ostala naprezanja,
- pretpostavljaju se mali pomaci i male deformacije,
- materijal je linearno elastičan, izotropan i homogen.

Deformiranje srednje plohe opisano je tangencijalnim komponentama pomaka u i v u pravcu međusobno okomitih jediničnih vektora duž koordinatnih crta α_1 i α_2, te komponente w u pravcu normale na srednju plohu

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}. \tag{3.131}$$



Slika 3.17. Komponente tenzora naprezanja na elementu ljuske

Komponente naprezanja prikazane su na elementu ljuske na slici 3.17. Razlikuju se normalne komponente naprezanja σ_{11} i σ_{22} koje djeluju okomito na presjeke u pravcu jediničnih vektora $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, posmična naprezanja σ_{12} i σ_{21} u ravnini presjeka paralelno sa srednjom plohom te posmične komponente naprezanja σ_{13} i σ_{23} u pravcu normale na srednju plohu.

Unutarnje sile izračunavaju se integriranjem naprezanja po debljini stijenke ljuske, a odnose se na jedinicu duljine koordinatnih crta na srednjoj plohi, slika 3.18.

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\mathrm{d}z\,, \qquad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\mathrm{d}z\,, \tag{3.132}$$

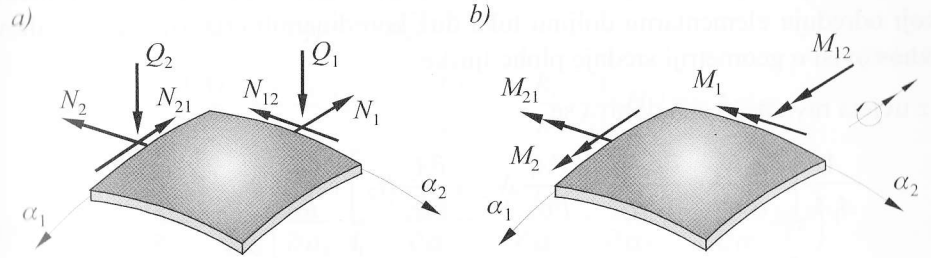
$$N_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\mathrm{d}z\,, \qquad N_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{21}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\mathrm{d}z\,, \tag{3.133}$$

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\mathrm{d}z\,, \qquad Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\mathrm{d}z\,. \tag{3.134}$$

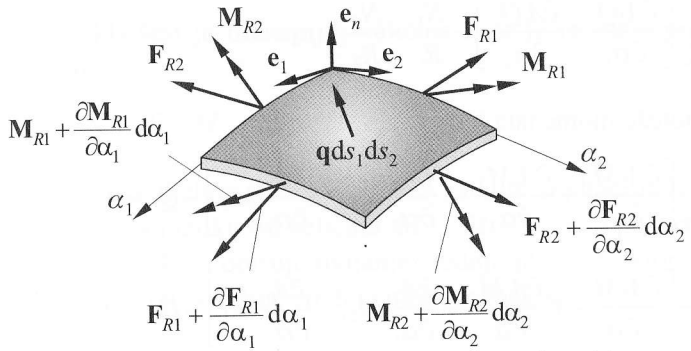
Momenti savijanja i uvijanja jednaki su

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\sigma_{11}\mathrm{d}z\,, \qquad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\sigma_{22}\mathrm{d}z\,, \tag{3.135}$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\sigma_{12}\mathrm{d}z\,, \qquad M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\sigma_{21}\mathrm{d}z\,. \tag{3.136}$$



Slika 3.18. Unutarnje veličine na elementu srednje plohe ljuske:
a) unutarnje sile, b) unutarnji momenti



Slika 3.19. Rezultirajući vektori unutarnjih sila, momenata i vanjskog površinskog opterećenja na elementu srednje plohe ljuske

Jednadžbe ravnoteže izvode se iz uvjeta ravnoteže elementa srednje plohe ljuske, prema slici 3.19., čije stranice su opterećene rezultirajućim vektorima unutarnjih veličina. Rezultirajuće unutarnje sile jednake su

$$\mathbf{F}_{R1} = \left(N_1\mathbf{e}_1 + N_{12}\mathbf{e}_2 + Q_1\mathbf{e}_n\right)A_2\mathrm{d}\alpha_2\,,$$

$$\mathbf{F}_{R2} = \left(N_{21}\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + Q_2\mathbf{e}_n\right)A_1\mathrm{d}\alpha_1\,, \tag{3.137}$$

a momenti su prikazani izrazima

$$\mathbf{M}_{R1} = \left(-M_{12}\,\mathbf{e}_1 + M_1\,\mathbf{e}_2\right) A_2 \mathrm{d}\alpha_2 ,$$

$$\mathbf{M}_{R2} = \left(-M_2\,\mathbf{e}_1 + M_{21}\,\mathbf{e}_2\right) A_1 \mathrm{d}\alpha_1 . \tag{3.138}$$

Vanjsko površinsko opterećenje također se prikazuje pomoću komponenata u pravcu jediničnih vektora

$$\mathbf{q}\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = \left(q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_n\mathbf{e}_n\right) A_1 A_2\,\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 . \tag{3.139}$$

Veličine A_1 i A_2 u relacijama (3.137), (3.138) i (3.139) Laméovi su parametri koji određuju elementarnu duljinu luka duž koordinatnih crta α_1 i α_2. Njihov iznos ovisi o geometriji srednje plohe ljuske.

Iz uvjeta ravnoteže sila dobiva se

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_2\right] + \frac{Q_1}{R_1} + p_1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 N_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_1\right] + \frac{Q_2}{R_2} + p_2 = 0 ,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial \alpha_2}\right] - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + p_n = 0 . \tag{3.140}$$

Uvjeti ravnoteže momenata jesu

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2\right] - Q_1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1\right] - Q_2 = 0 , \tag{3.141}$$

$$N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 .$$

Ako se poprečne sile Q_1 i Q_2 kao zavisne varijable prikažu pomoću momenata, te uvođenjem supstitucija

$$S = N_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} , \tag{3.142}$$

$$H = \frac{M_{12} + M_{21}}{2}, \tag{3.143}$$

uvjeti ravnoteže svode se na sljedeće tri jednadžbe prema [86].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_2 + \\
&+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2\frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right) = -A_1 A_2 q_1 , \\
&\frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_1 + \\
&+ \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + 2\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right) = -A_1 A_2 q_2 , \\
&\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) \right] = q_n .
\end{aligned} \tag{3.144}$$

U relacijama (3.144) šest je unutarnjih veličina koje je moguće prikazati kao članove vektora $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & S & M_1 & M_2 & H \end{bmatrix} . \tag{3.145}$$

Veličine N_1 , N_2 i S djeluju u tangencijalnoj ravnini srednje plohe i nazivaju se membranske sile, za razliku od veličina M_1 , M_2 koje su posljedica savijanja, te komponente H koja opisuje uvijanje srednje plohe. Vektor opterećenja koji se odnosi na jedinicu površine srednje plohe jednak je

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_n \end{bmatrix} . \tag{3.146}$$

Uvjete ravnoteže (3.144) moguće je prikazati u matričnom zapisu

$$\frac{1}{A_1A_2}\begin{bmatrix} \partial_{\alpha 1}A_2 & -A_{2,\alpha 1} & \left(\partial_{\alpha 2}A_1+A_{1,\alpha 1}\right) & \frac{1}{R_1}\partial_{\alpha 1}A_2 & -\frac{1}{R_1}A_{2,\alpha 1} & 2\left(\frac{1}{R_1}\partial_{\alpha 2}A_1+\frac{1}{R_2}A_{1,\alpha 2}\right) \\ -A_{1,\alpha 2} & \partial_{\alpha 2}A_1 & \left(\partial_{\alpha 1}A_2+A_{2,\alpha 1}\right) & -\frac{1}{R_2}A_{1,\alpha 2} & \frac{1}{R_2}\partial_{\alpha 2}A_1 & 2\left(\frac{1}{R_2}\partial_{\alpha 1}A_2+\frac{1}{R_1}A_{2,\alpha 1}\right) \\ -\frac{A_1A_2}{R_1} & -\frac{A_1A_2}{R_2} & 0 & \left(\partial_{\alpha 1}\frac{1}{A_1}\partial_{\alpha 1}A_2-\right. & \left(-\partial_{\alpha 1}\frac{1}{A_1}A_{2,\alpha 1}+\right. & \left[\partial_{\alpha 1}\frac{1}{A_1}\left(\partial_{\alpha 2}A_1+A_{1,\alpha 2}\right)+\right. \\ & & & \left.-\partial_{\alpha 2}\frac{1}{A_2}A_{1,\alpha 2}\right) & \left.+\partial_{\alpha 2}\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha 2}A_1\right) & \left.+\partial_{\alpha 2}\frac{1}{A_2}\left(\partial_{\alpha 1}A_2+A_{2,\alpha 1}\right)\right] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{bmatrix} \tag{3.147}$$

što odgovara matričnoj relaciji $\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}=-\mathbf{q}$. U matrici diferencijalnog operatora uvedene su oznake

$$\partial_{\alpha 1}=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \qquad A_{2,\alpha 1}=\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}. \tag{3.148}$$

Deformacija srednje plohe opisana je sa sljedećih šest veličina prikazanih u obliku vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}=\left[\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \gamma_{12} \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad 2\kappa_{12}\right], \tag{3.149}$$

gdje su ε_1 i ε_2 duljinska, a γ_{12} kutna deformacija srednje plohe. Veličine κ_1 i κ_2 označuju promjenu zakrivljenosti, a κ_{12} opisuje uvijenost ili torziju srednje plohe. Kinematičke relacije jednake su

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v+\frac{w}{R_1},$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u+\frac{w}{R_2},$$

$$\gamma_{12}=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v}{A_2}\right)+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u}{A_1}\right),$$

$$\kappa_1=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u}{R_1}\right)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{v}{R_2}\right),$$

$$\kappa_2=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\frac{v}{R_2}\right)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\frac{u}{R_1}\right),$$

$$\kappa_{12} = -\frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}v\right). \tag{3.150}$$

Primjenom matrične formulacije $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{u}$, dobiva se

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\\ \kappa_1\\ \kappa_2\\ 2\kappa_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_2}\partial_{\alpha1} & \frac{1}{A_1A_2}A_{1,\alpha2} & \frac{1}{R_1}\\ \frac{1}{A_1A_2}A_{2,\alpha1} & \frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2} & \frac{1}{R_2}\\ \frac{A_1}{A_2}\partial_{\alpha2}\frac{1}{A_1} & \frac{A_2}{A_1}\partial_{\alpha1}\frac{1}{A_2} & 0\\ \frac{1}{A_1}\partial_{\alpha1}\frac{1}{R_1} & \frac{1}{A_1A_2}A_{1,\alpha2}\frac{1}{R_2} & \left(-\frac{1}{A_1}\partial_{\alpha1}\frac{1}{A_1}\partial_{\alpha1} - \frac{1}{A_1A_2}A_{1,\alpha2}\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2}\right)\\ \frac{1}{A_1A_2}A_{2,\alpha1}\frac{1}{R_1} & \frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2}\frac{1}{R_2} & \left(-\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2}\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2} - \frac{1}{A_1A_2}A_{2,\alpha1}\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha1}\right)\\ \frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha2} - \frac{1}{A_1A_2}A_{1,\alpha2}\right) & \frac{2}{R_2}\left(\frac{1}{A_1}\partial_{\alpha1} - \frac{1}{A_1A_2}A_{2,\alpha1}\right) & -\frac{2}{A_1A_2}\left(\partial_{\alpha1\alpha2} - \frac{1}{A_1}A_{1,\alpha2}\partial_{\alpha1} - \frac{1}{A_2}A_{2,\alpha1}\partial_{\alpha2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}, \tag{3.151}$$

gdje je $\partial_{\alpha1\alpha2}$ parcijalna derivacija po koordinatama α_1 i α_2.

Konstitutivne jednadžbe jednake su

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right), \qquad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right),$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma_{12}, \tag{3.152}$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\kappa_1 + \nu\kappa_2\right), \qquad M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\kappa_2 + \nu\kappa_1\right),$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\kappa_{12}. \tag{3.153}$$

Relacije (3.152) u matričnoj formulaciji imaju oblik

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ S \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \tag{3.154}$$

gdje je matrica elastičnih konstanti

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.155}$$

jednaka matrici elastičnosti u relaciji (3.95) za rješavanje problema ploče opterećene u srednjoj ravnini. Matrični prikaz relacija (3.153) jednak je

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix}, \tag{3.156}$$

što pokazuje da je matrica elastičnosti

$$\mathbf{D}_f = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.157}$$

jednaka izrazu (3.121) za rješavanje problema savijanja ploča. Membranske sile i pripadne komponente deformacije mogu se prikazati u obliku vektora

$$\boldsymbol{\sigma}_m^T = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & S \end{bmatrix}, \tag{3.158}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \gamma_{12} \end{bmatrix}.$$

Analogno se prikazuju ostale veličine u konstitutivnim jednadžbama

$$\boldsymbol{\sigma}_f^T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & H \end{bmatrix}, \tag{3.159}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f^T = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & 2\kappa_{12} \end{bmatrix}.$$

Koristeći se naznačenim supstitucijama, konstitutivne relacije za rješavanje problema proizvoljnih ljuskastih konstrukcija moguće je prikazati u simboličkom matričnom zapisu na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f \end{bmatrix}. \tag{3.160}$$

U [86] je pokazano da je za tankostjene ljuske za koje vrijedi $\frac{h}{R} << 1$, uz dopuštenu grešku, u konstitutivnim relacijama moguće zamijeniti unutarnju veličinu S membranskom posmičnom silom N_{12}, a veličinu H momentom uvijanja M_{12}. Na taj način izrazi koji povezuju membransku posmičnu silu i kutnu deformaciju te moment uvijanja s pripadnom deformacijom, postaju

$$N_{12} = N_{21} = \frac{E\,h}{2(1+\nu)}\gamma_{12},$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{E\,h^3}{12(1+\nu)}\kappa_{12}. \tag{3.161}$$

U tom slučaju vektor unutarnjih veličina $\boldsymbol{\sigma}$ prikazan u (3.145) moguće je zamijeniti vektorom $\boldsymbol{\sigma}^*$

$$\boldsymbol{\sigma}^{*T} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_{12} & M_1 & M_2 & M_{12} \end{bmatrix}, \tag{3.162}$$

te konstitutivna relacija postaje

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{3.163}$$

Izraz (3.163) čini konstitutivne jednadžbe jednostavnijim i pokazuje potpunu analogiju s odgovarajućim izrazima za rješavanje problema ploča. Potrebno je također napomenuti da se primjenom konstitutivne jednadžbe (3.163) potencijalna energija elastičnoga deformiranja može samo približno opisati, a uvjeti ravnoteže elementa ljuske nisu u potpunosti zadovoljeni. Usprkos tim nedostacima, relacija (3.163) može se s dovoljnom točnošću primijeniti za rješavanje inženjerskih problema. Pritom nastale greške reda su veličine grešaka koje su posljedica usvojenih pretpostavki u teoriji tankostjenih ljusaka [49, 86, 111].

Pri postavljanju rubnih uvjeta pretpostavlja se da su rubovi opisani koordinatnim crtama $\alpha_1 = \text{konst.}$, odnosno $\alpha_2 = \text{konst.}$ Na rubu koji se podudara s koordinatnom crtom α_1, za koji vrijedi $\alpha_2 = \text{konst.}$, rubni uvjeti sila opisani su s normalnom silom N_2, momentom savijanja M_2 te efektivnom posmičnom silom u ravnini ljuske N_{21} i efektivnom poprečnom silom $\overline{Q}_2$

$$\overline{N}_{21} = N_{21} + \frac{M_{21}}{R_1},$$

$$\overline{Q}_2 = Q_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1}. \tag{3.164}$$

Relacije (3.164) pokazuju da je moment uvijanja M_{21} zamijenjen odgovarajućim tangencijalnim i poprečnim silama koje su superponirane posmičnoj tangencijalnoj komponenti N_{21} i poprečnoj sili Q_2 [86]. Efektivne sile (3.164) moguće je pomoću izraza (3.142) i (3.143) te druge jednadžbe iz uvjeta ravnoteže (3.141), prikazati ovisno o veličinama S i H na sljedeći način:

$$\overline{N}_{21} = S + 2\frac{H}{R_1},$$

$$\overline{Q}_2 = \frac{1}{A_1 A_2}\left(2\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1\right). \tag{3.165}$$

Ako na slobodnom rubu ljuske u ravnini tangencijalnoj na srednju plohu djeluje vanjska normalna sila n_{b2}, posmična sila n_{b21} te poprečna sila f_{b2} i moment savijanja m_{b2}, rubni uvjeti su

$$n_{b2} = N_2,$$

$$n_{b21} = S + 2\frac{H}{R_1},$$

$$f_{b2} = \frac{1}{A_1 A_2}\left(2\frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1\right), \tag{3.166}$$

$$m_{b2} = M_2.$$

Ove relacije moguće je prikazati u obliku $\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{bmatrix} n_{b2} \\ n_{b21} \\ f_{b2} \\ m_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{R_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_1 A_2} A_{1,\alpha 2} & \frac{1}{A_1 A_2}\partial_{\alpha 2} A_1 & \frac{2}{A_1 A_2}\partial_{\alpha 1} A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ S \\ M_1 \\ M_2 \\ H \end{bmatrix}. \tag{3.167}$$

Ako su na rubu $\alpha_2 = \text{konst.}$ zadani pomaci i kut zakreta

$$\mathbf{u}_b^T = \begin{bmatrix} u_b & v_b & w_b & \vartheta_{1b} \end{bmatrix}, \tag{3.168}$$

gdje je ϑ_1 kut zakreta normale na srednju plohu oko tangente na koordinatnu crtu α_1 [86]

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{v}{R_2}, \tag{3.169}$$

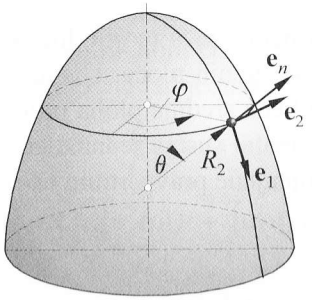
rubni uvjeti pomaka jesu

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u} : \quad \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \\ \vartheta_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{A_2}\partial_{\alpha 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{3.170}$$

Za rub opisan koordinatnom crtom $\alpha_1 = \text{konst.}$ rubni uvjeti izvode se na analogan način.

Ako su u ljusci svi momenti zanemarivo mali ili jednaki nuli, vektor unutarnjih veličina $\boldsymbol{\sigma}$ sadrži samo membranske sile koje leže u ravnini tangencijalnoj na srednju plohu. To je problem membranske teorije ljusaka [49, 86] koji je statički određen, tj. za izračunavanje unutarnjih sila dovoljni su samo uvjeti ravnoteže.

U konstrukcijama često nalaze primjenu specijalni ljuskasti oblici kao što su osnosimetrične ljuske, slika 3.20. Njihova srednja ploha nastaje rotacijom proizvoljne ravninske crte oko pravca koji čini os ljuske. Crte glavnih zakrivljenosti su meridijani i paralele s pripadajućim polumjerima R_1 i R_2.

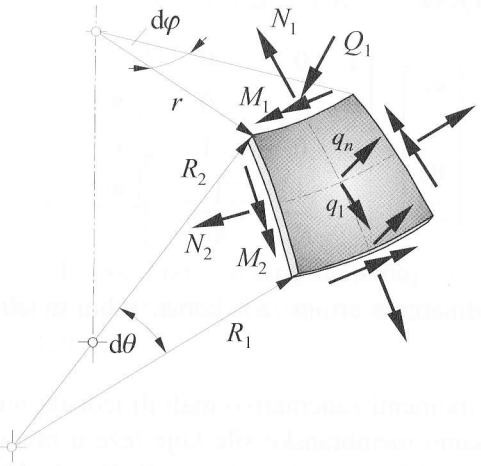


Slika 3.20. Srednja ploha osnosimetrične ljuske

Polumjeri zakrivljenosti su funkcije samo kuta θ između normale na srednju plohu i osi ljuske. Na temelju elementarne lučne duljine meridijana $ds_1 = R_1 \, d\theta$ i paralele $ds_2 = R_1 \sin\theta \, d\varphi$, određuju se Laméovi parametri

$$A_1 = R_1 \,, \qquad A_2 = R_2 \sin\theta \,. \tag{3.171}$$

Ako u ljusci vlada stanje osnosimetrične deformacije, tj. opterećenje zajedno s rubnim uvjetima funkcija je samo koordinate θ, unutarnje su veličine meridijalna i cirkularna normalna sila N_1 i N_2, meridijalna poprečna sila Q_1 te meridijalni i cirkularni moment savijanja M_1 i M_2, slika 3.21.



Slika 3.21. Sile i momenti na elementu ljuske za stanje osnosimetrične deformacije

Deformacija srednje plohe opisana je s pripadnim duljinskim deformacijama ε_1 i ε_2 te veličinama κ_1 i κ_2 koje opisuju promjenu zakrivljenosti. Rješavanje problema osnosimetrične deformacije osnosimetričnih ljusaka detaljno je prikazano u [49, 67, 86].

Pomoću ovdje prikazanih općih izraza teorije ljusaka moguće je izvesti relacije za rješavanje problema tankostjenih ploča. Uvrštavanjem za polumjere zakrivljenosti $R_1 = R_2 = \infty$, zakrivljena srednja ploha prelazi u ravninu, a Laméovi parametri za Kartezijev koordinatni sustav jednaki su jedinici. Pritom su krivocrtne koordinate α_1 i α_2 zamijenjene pravocrtnim koordinatama x i y [102].

4. VARIJACIJSKI PRINCIPI

Prilikom rješavanja složenijih, dvodimenzijskih i trodimenzijskih problema teorije elastičnosti, teško je u potpunosti zadovoljiti osnovne relacije koje su prikazane u prethodnom poglavlju. To je razlog da se primjenjuju varijacijski principi u kojima su sadržane relacije teorije elastičnosti pomoću kojih je, uz dopuštenu grešku, moguće provesti približno rješavanje problema. Na taj su način i odgovarajuće jednadžbe teorije elastičnosti približno zadovoljene. Ovdje će se prikazati varijacijski principi virtualnih pomaka i virtualnih sila kojima su, za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela u elastičnom području, ekvivalentni principi minimuma potencijalne energije i komplementarne potencijalne energije. Naime, u principu virtualnih pomaka implicitno su uključeni uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila, a u principu virtualnih sila sadržane su kinematičke relacije i rubni uvjeti pomaka. Osim spomenutih varijacijskih principa, izvedeni su i prošireni varijacijski principi koji omogućuju istodobno uključivanje svih potrebnih relacija teorije elastičnosti. Pomoću navedenih varijacijskih principa izvode se osnovne jednadžbe u različitim varijacijskim formulacijama konačnih elemenata.

4.1. Rad vanjskih i unutarnjih sila. Potencijalna energija

Ako je tijelo volumena V omeđeno plohom površine S, a vanjske sile su zadane volumenske i površinske sile, njihov je rad jednak

$$W_e = \int_V \left(q_{vx}u + q_{vy}v + q_{vz}w\right)\mathrm{d}V + \int_S \left(q_{bx}u_S + q_{by}v_S + q_{bz}w_S\right)\mathrm{d}S = \\ = \int_V \mathbf{q}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_S \mathbf{q}_b^T\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S = \int_V \mathbf{u}^T\mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_S \mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S, \tag{4.1}$$

gdje su u_S, v_S i w_S komponente pomaka na plohi površine S. Rad deformiranja ili rad unutarnjih sila jednak je

$$W_i = \int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \mathrm{d}V = \\ = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V. \tag{4.2}$$

Pomoću kinematičke relacije (3.16), rad unutarnjih sila može se napisati u obliku

$$W_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\, \mathrm{d}V, \tag{4.3}$$

gdje diferencijalni operator $\mathbf{D}_k$ pokazuje da je u podintegralnoj funkciji potrebno provesti deriviranje komponenata pomaka. Primjenom Gaussove formule, pri čemu se volumenski integral zamjenjuje s integralom po plohi koja omeđuje volumen, moguće je veličinu $\mathbf{D}_k\mathbf{u}$ transformirati u vektor pomaka $\mathbf{u}$. Zbog jednostavnosti, ovdje će se prikazati transformacija samo jednog člana u izrazu (4.2), kako bi se nakon toga opće relacije prikazale u matričnom obliku.

Uz supstituciju $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ prvi član u relaciji (4.2) moguće je napisati u obliku

$$\int_V \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)\mathrm{d}V - \int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u\, \mathrm{d}V. \tag{4.4}$$

Pomoću Gaussove formule prvi integral na desnoj strani transformira se u površinski integral

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u)\mathrm{d}V = \int_S \sigma_x u\, a_{11}\, \mathrm{d}S, \tag{4.5}$$

gdje je a_{11} kosinus smjera vanjske normale na plohu površine S koja obuhvaća kontinuum volumena V. Na temelju (4.5), izraz (4.4) može se prikazati relacijom

$$\int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u\, \mathrm{d}V + \int_V \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}V = \int_S a_{11}\sigma_x u\, \mathrm{d}S. \tag{4.6}$$

Ako se isti postupak provede za sve članove u (4.2), a rezultati zbroje, uz primjenu simboličkog prethodno uvedenoga matričnog zapisa, dobiva se relacija

$$\int_V \left(\mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\right)\mathrm{d}V = \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}S, \tag{4.7}$$

koja povezuje diferencijalne operatore $\mathbf{D}_e$ i $\mathbf{D}_k$ s operatorom površinskog opterećenja $\mathbf{R}_q$. Budući da je član $\mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma}$ moguće zamijeniti površinskim silama q

koje djeluju na plohu S, što je u skladu s rubnim uvjetima sila, jednakost (4.7) može se napisati u obliku

$$\int_V \left(\mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\right) \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_S \, \mathrm{d}S. \tag{4.8}$$

Za zadano površinsko opterećenje vrijedi jednakost $\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_b$. Izraz u zagradi pod integralom na lijevoj strani jest divergencija čiji se integral po volumenu transformira u plošni integral. Relacije (4.7) i (4.8) također pokazuju da su diferencijalni operatori $\mathbf{D}_e$ i $\mathbf{D}_k$ međusobno adjungirani [72].

Međusobnu vezu između rada unutarnjih i vanjskih sila moguće je dobiti transformacijom uvjeta ravnoteže. Ako se relacija (3.9) pomnoži vektorom pomaka i provede integriranje po volumenu, dobiva se

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}V = -\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q} \, \mathrm{d}V \,. \tag{4.9}$$

Pritom se pretpostavlja da komponente naprezanja osim uvjeta ravnoteže zadovoljavaju i rubne uvjete sila, a vektor pomaka zadovoljava kinematičku relaciju (3.16) i rubne uvjete pomaka. Uvođenjem supstitucije u lijevu stranu jednakosti (4.9) pomoću izraza (4.8), dobiva se sljedeća relacija

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u} \, \mathrm{d}V = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q} \, \mathrm{d}V + \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_S \, \mathrm{d}S \tag{4.10}$$

koja pokazuje da je rad unutarnjih sila jednak radu vanjskih volumenskih i površinskih sila

$$W_i = W_e \,. \tag{4.11}$$

Taj izraz u mehanici čvrstih tijela čini zakon energije i vrijedi i za elastično kao i za neelastično ponašanje materijala.

Pri deformiranju elastičnih tijela unutarnje sile posjeduju potencijal. Rad deformiranja pretvara se u potencijalnu energiju koja je jednaka radu vanjskih sila. Ako se proces deformiranja provodi od neopterećenoga i nedeformiranog stanja, potencijalna energija za neku određenu deformaciju $\boldsymbol{\varepsilon}$ jednaka je

$$\Pi_i = \int_V \left(\int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^T \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \right) \mathrm{d}V. \tag{4.12}$$

U slučaju kad se materijal ponaša linearno elastično, izraz za potencijalnu energiju elastičnoga deformiranja postaje

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V\,. \tag{4.13}$$

Ako se u tijelu pojavljuju početne deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, koje su najčešće posljedica promjene temperature pri čemu je naprezanje opisano relacijom (3.31), potencijalna energija Π_i izračunava se pomoću izraza

$$\Pi_i = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right)\mathrm{d}V\,. \tag{4.14}$$

Potencijalna energija vanjskih volumenskih i zadanih površinskih sila $\mathbf{q}_b$ jednaka je

$$\Pi_e = -\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V - \int_{S_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S\,, \tag{4.15}$$

gdje je S_q dio površine na kojoj djeluje opterećenje $\mathbf{q}_b$. Negativan predznak pokazuje da za vrijeme rada dolazi do deformiranja tijela pri čemu vanjske sile gube potencijal, što je povezano s povećanjem potencijalne energije deformiranja.

Izrazi za rad sila i potencijalnu energiju koji se odnose na konstrukcijske elemente, kao što su štapovi, ploče i ljuske, analogni su ovdje prikazanim relacijama. Pritom su u dvodimenzijskim problemima volumenski integrali zamijenjeni površinskim integralima, odnosno krivuljnim integralima u jednodimenzijskim problemima. Umjesto rubnih površinskih sila, djeluju sile koje se odnose na jedinicu duljine ruba pa su integrali po površini zamijenjeni integralima po duljini rubne crte. Na taj način, ukupna potencijalna energija za dvodimenzijske konstrukcije jednaka je

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}A - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}A - \int_{C_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}s\,, \tag{4.16}$$

gdje je C_q duljina ruba na kojemu djeluje opterećenje $\mathbf{q}_b$ po jedinici duljine, a koji omeđuje plohu ploče ili ljuske površine A. Za jednodimenzijske probleme vrijedi relacija

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\ell \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}s - \int_\ell \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}s - \mathbf{u}^T \mathbf{q}_b\Big|_{x=\ell}\,. \tag{4.17}$$

U relaciji (4.17) ℓ je duljina štapa, a posljednji član jednak je potencijalnoj energiji opterećenja $\mathbf{q}_b$ koje djeluje na rubu štapa koji je određen koordinatom $x = \ell$.

4.2. Princip virtualnih pomaka

Virtualni pomaci su mali zamišljeni pomaci koji se označavaju varijacijskim simbolom $\delta\mathbf{u}$. Varijacija je zamišljena, proizvoljno mala promjena neke veličine. Računske operacije s varijacijama analogne su operacijama s diferencijalom. Virtualni rad jednak je skalarnom produktu vektora sile i virtualnog pomaka. Princip virtualnih pomaka temelji se na zakonu energije (4.10). Deformabilno tijelo nalazi se u ravnoteži ako je virtualni rad unutarnjih sila jednak virtualnom radu vanjskih sila, što se može napisati u obliku

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S\,. \tag{4.18}$$

Pritom virtualni pomaci moraju biti kontinuirane funkcije koje zadovoljavaju kinematičke relacije i rubne uvjete pomaka. Duž ruba na kojemu su pomaci zadani, njihova je varijacija $\delta\mathbf{u}_b$ jednaka nuli. U izrazu (4.18) implicitno su sadržani uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila, što će se dokazati u sljedećem izlaganju.

Ako se pomak $\mathbf{u}$ zamijeni virtualnim pomakom $\delta\mathbf{u}$, relacija (4.7) može se napisati u obliku

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}_k\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = -\int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V + \int_S \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{R}_q\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S\,. \tag{4.19}$$

Budući da je $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\delta\mathbf{u}$, vrijede jednakosti

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}_k\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V, \tag{4.20}$$

te se princip virtualnih radova (4.18) može prikazati izrazom

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}_k\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S\,. \tag{4.21}$$

Uvrštavanjem (4.19) u (4.21) dobiva se

$$\int_V \delta\mathbf{u}^T\left(\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q}\right)\mathrm{d}V - \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T\left(\mathbf{R}_q\,\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}_b\right)\mathrm{d}S = 0\,. \tag{4.22}$$

Budući da jednadžba (4.22) vrijedi za bilo koji $\delta\mathbf{u}$ i $\delta\mathbf{u}_S$, izrazi u zagradama pod integralima moraju biti jednaki nuli

$$\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0\,, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{R}_q\,\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}_b = 0\,, \tag{4.24}$$

a označuju uvjete ravnoteže i rubne uvjete sila. Na taj način je dokazano da su ti uvjeti sadržani u prikazanom varijacijskom principu, a ispunjeni su samo ako je varijacijski princip u potpunosti ispunjen. To je ujedno i dokaz da je taj varijacijski princip "slaba" (ublažena) formulacija uvjeta ravnoteže i rubnih uvjeta sila.

4.3. Princip virtualnih sila

Princip virtualnih sila izvodi se iz zakona energije (4.10) provedbom varijacije po unutarnjim i vanjskim silama. Budući da je varijacija zadanih volumenskih sila jednaka nuli, dobiva se relacija

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathrm{d}V = \int_{S_u} \delta \mathbf{q}_S^T \mathbf{u}_b\, \mathrm{d}S \tag{4.25}$$

koja pokazuje da je komplementarni virtualni rad unutarnjih sila jednak komplementarnom virtualnom radu vanjskih sila. Taj princip još se naziva i komplementarni princip virtualnog rada. Na plohi površine S_u po kojoj se provodi integriranje desne strane jednadžbe zadani su pomaci $\mathbf{u}_b$. Uz jednadžbu (4.25) dodatno moraju biti ispunjeni uvjeti ravnoteže

$$\mathbf{D}_e\, \delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{4.26}$$

i rubni uvjeti sila na dijelu površine plohe na kojemu je zadano opterećenje $\mathbf{q}_b$

$$\delta \mathbf{q}_b = 0 \rightarrow \mathbf{R}_q\, \delta\boldsymbol{\sigma} = 0\,. \tag{4.27}$$

Za razliku od principa virtualnih pomaka, tu su kinematičke relacije i rubni uvjeti pomaka implicitno uključeni u varijacijski princip. Na taj je način princip virtualnih sila "slaba" (ublažena) formulacija kinematičkih relacija i rubnih uvjeta pomaka. Ako se u relaciji (4.7) provede varijacija po naprezanjima, dobiva se izraz

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \delta\boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V + \int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\, \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{R}_q \delta\boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}S \tag{4.28}$$

pomoću kojega se jednadžba (4.25) može transformirati u oblik

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_k \mathbf{u}\right) \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \delta\boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V + \int_S \mathbf{u}_S^T \mathbf{R}_q \delta\boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}S - \int_{S_u} \delta \mathbf{q}_S^T \mathbf{u}_b\, \mathrm{d}S = 0\,. \tag{4.29}$$

Na temelju (4.26) drugi integral jednak je nuli, a za dio površine S_u na kojemu su zadani pomaci, vrijedi rubni uvjet $\delta \mathbf{q}_S = \mathbf{R}_q\, \delta\boldsymbol{\sigma}$. Na dijelu površine $S_q = S - S_u$ sa zadanim opterećenjem, ispunjen je uvjet (4.27). Na taj način jednadžba (4.29) prelazi u oblik

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{D}_k\mathbf{u})\,\mathrm{d}V+\int_{S_u}\delta\mathbf{q}_S^T(\mathbf{u}_S-\mathbf{u}_b)\,\mathrm{d}S=0 \tag{4.30}$$

iz kojega slijede jednadžbe

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}_k\mathbf{u} \tag{4.31}$$

$$\mathbf{u}_b=\mathbf{u}_S \tag{4.32}$$

koje pokazuju da su kinematičke relacije i rubni uvjeti pomaka sadržani u prikazanom varijacijskom principu.

4.4. Princip minimuma potencijalne energije

Taj varijacijski princip temelji se na uvjetu stacionarnosti funkcionala. Funkcional je funkcija definirana integralima čiji su argumenti također funkcije. Elastični kontinuum posjeduje funkcional koji je jednak ukupnoj potencijalnoj energiji. Ako je u podintegralnoj funkciji najveća derivacija po prostornim koordinatama m-tog reda, takav problem se naziva C^{m-1}-varijacijski problem. U tom slučaju, u geometrijskim rubnim uvjetima moraju biti obuhvaćene varijable zajedno s derivacijama do (m-1)-reda.

Elastični sustav je u ravnoteži kad je stacionarna vrijednost funkcionala jednaka minimumu ukupne potencijalne energije

$$\Pi=\Pi(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon})=\min, \tag{4.33}$$

što je ispunjeno ako je prva varijacija jednaka nuli

$$\delta\Pi=\delta\Pi_i+\delta\Pi_e=0\,. \tag{4.34}$$

Uz ovaj uvjet moraju biti zadovoljeni geometrijski rubni uvjeti ili rubni uvjeti pomaka te kinematičke relacije. Uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila implicitno su uključeni u relaciju (4.34). Varijaciju je potrebno provesti po nepoznatim komponentama pomaka i deformacije pa se uvrštavanjem (4.13) i (4.15) u (4.34) dobiva relacija

$$\delta\Pi=\int_V\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\int_V\delta\mathbf{u}^T\mathbf{q}\,\mathrm{d}V-\int_{S_q}\delta\mathbf{u}_S^T\mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S=0 \tag{4.35}$$

koja je jednaka izrazu (4.18). To pokazuje da su za elastične sustave princip virtualnih pomaka i princip minimuma ukupne potencijalne energije opisani istim izrazima. Na taj način nije potrebno dokazivati da su uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila implicitno sadržani u principu minimuma potencijalne energije. U skla-

du s varijacijskim računom te relacije nazivaju se Eulerove jednadžbe principa minimuma potencijalne energije.

4.5. Princip minimuma komplementarne potencijalne energije

Osim varijacijskog principa minimuma potencijalne energije, često se u mehanici elastičnih tijela rabi princip minimuma komplementarne potencijalne energije. U tom slučaju potrebno je da polje naprezanja u elastičnom kontinuumu zadovoljava uvjete ravnoteže i rubne uvjete sila

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{q}=0, \\ &\mathbf{q}_b=\mathbf{R}_q\,\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Kinematičke relacije i rubni uvjeti pomaka opisani su u "slaboj" (ublaženoj) formulaciji

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{D}_k\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V+\int_{S_u}\delta\mathbf{q}_S^T\left(\mathbf{u}_S-\mathbf{u}_b\right)\mathrm{d}S=0\,. \tag{4.37}$$

Ova relacija izvedena je u odjeljku 4.3. iz principa virtualnih sila (4.25) koji se za linearno elastične sustave pomoću Hookeova zakona (3.27) može transformirati u oblik

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\int_{S_u}\delta\mathbf{q}_S^T\,\mathbf{u}_b\,\mathrm{d}S=0\,. \tag{4.38}$$

Izraz (4.38) jednak je uvjetu stacionarnosti funkcionala

$$\delta\Pi^*=0 \tag{4.39}$$

koji u mehanici elastičnih tijela opisuje minimum komplementarne potencijalne energije

$$\Pi^*=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\int_{S_u}\mathbf{q}_S^T\,\mathbf{u}_b\,\mathrm{d}S=\min\,. \tag{4.40}$$

Prvi integral jednak je komplementarnoj energiji elastičnog deformiranja, a drugi plošni integral je negativan rad reaktivnih sila pri zadanim pomacima. Ako je početna deformacija jednaka nuli, za linearno elastične sustave komplementarna potencijalna energija elastičnog deformiranja jednaka je potencijalnoj energiji

$$\Pi_i^* = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = \\ = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \Pi_i . \tag{4.41}$$

4.6. Prošireni varijacijski principi

U prethodnom izlaganju je pokazano da je za rješavanje problema u mehanici elastičnih tijela uz uvjete stacionarnosti funkcionala potrebno zadovoljiti i odgovarajuće dodatne uvjete. Te dodatne uvjete često nije jednostavno ispuniti, što je osobito slučaj u formulaciji principa minimuma ukupne komplementarne energije. Izbor interpolacijske funkcije za naprezanje koja mora zadovoljiti uvjete ravnoteže može stvoriti znatne poteškoće. Primjenom metode Lagrangeova multiplikatora moguće je izvesti proširene varijacijske principe gdje su spomenuti dodatni uvjeti uključeni u formulaciju. Pritom su Lagrangeovi multiplikatori fizikalne veličine koje su jednake konjugiranim varijablama pri definiranju mehaničkoga rada. U tom slučaju stacionarna vrijednost funkcionala više ne odgovara njegovu minimumu.

Proširivanjem funkcionala koji opisuje ukupnu potencijalnu energiju izvodi se Hu-Washizuov varijacijski princip, pri čemu je funkcional jednak

$$\Pi_{HW} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V - \int_{S_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S - \\ - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_k\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V - \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T\left(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_b\right)\mathrm{d}S. \tag{4.42}$$

Ovdje su kinematičke relacije i rubni uvjeti pomaka uključeni u funkcional, a Lagrangeovi su multiplikatori naprezanje $\boldsymbol{\sigma}$ i površinsko opterećenje $\mathbf{q}_S$. Neovisne varijable po kojima se provode varijacije jesu pomak $\mathbf{u}$, deformacija $\boldsymbol{\varepsilon}$, naprezanje $\boldsymbol{\sigma}$ i površinsko opterećenje $\mathbf{q}_S$. Uvjet stacionarnosti $\delta\Pi_{HW} = 0$ jednak je

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V - \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S - \int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_k\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V - \\ - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_k\delta\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V - \int_{S_u} \delta\mathbf{q}_S^T\left(\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_b\right)\mathrm{d}S - \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T\,\delta\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.43}$$

Pomoću relacije (4.7) koja se nakon provedbe varijacije po pomacima može napisati kao

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \delta\mathbf{u}\, \mathrm{d}V = -\int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V + \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}S + \int_{S_u} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}S, \quad (4.44)$$

izraz (4.43) transformira se u oblik

$$\begin{aligned} &-\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V - \int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}_k\mathbf{u})\mathrm{d}V - \int_V \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q})\mathrm{d}V - \\ &-\int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T (\mathbf{q}_b - \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}S - \int_{S_u} \delta\mathbf{u}_S^T (\mathbf{q}_S - \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}S - \int_{S_u} \delta\mathbf{q}_S^T (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_b)\mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

iz kojega slijede sljedeće jednadžbe:

konstitutivne relacije, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$,

kinematičke relacije, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{u}$,

uvjeti ravnoteže, $\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}$,

rubni uvjeti na plohi površine S_q, $\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma}$,

rubni uvjeti na plohi površine S_u, $\mathbf{q}_S = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma}$,

rubni uvjeti na plohi površine S_u, $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_b$.

Te relacije su Eulerove jednadžbe Hu-Washizuova varijacijskog principa.

Na analogan način moguće je proširiti funkcional koji je jednak ukupnoj komplementarnoj energiji. Uključivanjem uvjeta ravnoteže i rubnih uvjeta sila prošireni je funkcional jednak

$$\begin{aligned} \Pi_{ext}^* = &\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T \mathbf{u}_b\,\mathrm{d}S + \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q})\,\mathrm{d}V - \\ &-\int_{S_q} \mathbf{u}_S^T(\mathbf{q}_S - \mathbf{q}_b)\mathrm{d}S, \end{aligned} \quad (4.46)$$

gdje su Lagrangeovi multiplikatori pomaci $\mathbf{u}$ i $\mathbf{u}_S$. Nakon provedbe supstitucije pomoću relacije

$$\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}_e\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = -\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_{S_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_S\,\mathrm{d}S + \int_{S_u} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_S\,\mathrm{d}S \quad (4.47)$$

koja se izvodi iz (4.8), prošireni funkcional (4.46) transformira se u novi oblik koji je jednak funkcionalu Hellinger-Reissnera

$$\Pi_{HR} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \\ + \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_b)\,\mathrm{d}S + \int_{S_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S. \tag{4.48}$$

Ovdje su neovisne varijable naprezanje $\boldsymbol{\sigma}$, pomak $\mathbf{u}$, te pomak i opterećenje na površini kontinuuma $\mathbf{u}_S$ i $\mathbf{q}_S$. Varijacijski princip koji opisuje stacionarna vrijednost funkcionala (4.48), $\delta \Pi_{HR} = 0$, Hellinger-Reissnerov je varijacijski princip

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \\ + \int_{S_u} \delta\mathbf{q}_S^T (\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_b)\,\mathrm{d}S + \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T \delta\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S + \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.49}$$

Potrebno je uočiti da je varijacija zadanih volumenskih sila $\delta\mathbf{q}_b = 0$. Relacije koje su implicitno sadržane u ovom varijacijskom principu jednake su kao i u Hu-Washizovu varijacijskom principu, a izvode se analognim postupkom.

5. PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE PROBLEMA MEHANIKE KONTINUUMA

Za rješavanje problema mehanike kontinuuma rabi se diferencijalna i varijacijska formulacija. Diferencijalna formulacija temelji se na izvođenju diferencijalnih jednadžbi koje opisuju problem u određenom području, pri čemu rješenje ovisi o rubnim uvjetima. Na taj način rješenje u svakoj točki razmatranog područja ovisi o vrijednostima koje su zadane u točkama na rubu, što je razlog da se taj problem često naziva problemom rubnih vrijednosti. Potrebno je naći nepoznatu funkciju koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu i pridružene rubne uvjete. Pritom stoje na raspolaganju metode izravne integracije i metode za dobivanje približnog rješenja. Točno rješenje izravnim integriranjem diferencijalne jednadžbe moguće je dobiti samo za ograničeni broj jednostavnijih problema. Mnogo češće se rabe približni postupci rješavanja kao što su metoda težinskog reziduala i metoda konačnih razlika.

Pri varijacijskoj formulaciji problema potrebno je naći nepoznatu funkciju ili više funkcija koje zadovoljavaju uvjet stacionarnosti funkcionala. Pritom funkcija također mora zadovoljavati odgovarajuće dodatne relacije koje nisu implicitno sadržane u funkcionalu. Diferencijalna i varijacijska formulacija međusobno su ekvivalentne jer funkcije koje zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu i pridružene rubne uvjete ispunjavaju i uvjet stacionarnosti funkcionala. Kako bi se varijacijska formulacija mogla primijeniti, potrebno je da za razmatrani problem postoji funkcional. Prednost te formulacije u odnosu na postupak rješavanja diferencijalnih jednadžbi je niži red derivacije u podintegralnoj funkciji funkcionala od reda derivacije koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednadžbi za razmatrani problem. Na taj način tražena nepoznata funkcija mora posjedovati derivacije nižeg reda od onoga koji je potreban u diferencijalnoj formulaciji. Ako je u funkcionalu najveća derivacija m-tog reda, varijacijski je problem C^{m-1}, pri čemu je najveći red derivacije u geometrijskim rubnim uvjetima jednak m-1, a u prirodnim rubnim uvjetima pojavljuju se derivacije reda od m do $2m$-1. U odgovarajućoj diferencijalnoj formulaciji najveći red derivacije u diferencijalnoj jed-

nadžbi je $2m$. U varijacijskoj formulaciji nepoznata funkcija ne mora uvijek zadovoljavati prirodne rubne uvjete jer oni mogu biti sadržani u funkcionalu. U mehanici deformabilnih tijela geometrijski rubni uvjeti opisuju pomake i derivacije pomaka na rubu, a prirodni rubni uvjeti su rubni uvjeti sila. Metoda koja se najčešće rabi za približno rješavanje problema mehanike kontinuuma primjenom varijacijske formulacije jest Rayleigh-Ritzova metoda. Budući da su metoda težinskog reziduala i Rayleigh-Ritzova metoda u uskoj vezi s formulacijom metode konačnih elemenata, ovdje će se ukratko izložiti njihove teorijske osnove.

5.1. Metoda težinskog reziduala

Metoda težinskog reziduala je postupak za određivanje približnog rješenja diferencijalnih jednadžbi. Neka je u diferencijalnoj formulaciji problem u području V, koje je omeđeno plohom S, opisan relacijom

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{5.1}$$

gdje je $\mathbf{A}$ linearni diferencijalni operator, $\mathbf{u}$ je vektor zavisnih varijabli, a $\mathbf{q}$ je poznata funkcija neovisnih varijabli. Duž rubne plohe S opisani su rubni uvjeti u obliku

$$\mathbf{B}\,\mathbf{u} - \mathbf{q}_b = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

gdje je $\mathbf{B}$ operator rubnih veličina, a $\mathbf{q}_b$ su zadane veličine na rubnoj plohi S. Potrebno je naći funkcije zavisnih varijabli koje zadovoljavaju jednadžbu (5.1). Nepoznato rješenje za komponente vektora $\mathbf{u}$ moguće je aproksimirati pomoću pretpostavljenih funkcija f_i i nepoznatih parametara a_i

$$\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{a}. \tag{5.3}$$

U ovoj matričnoj relaciji $\boldsymbol{\Phi}$ je matrica linearno neovisnih funkcija f_i, a $\mathbf{a}$ je vektor nepoznatih parametara

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

koji su za statičke probleme konstantne veličine. Svakom nepoznatom parametru a_i pridružena je funkcija f_i koju je potrebno tako odabrati da su zadovoljeni rubni uvjeti (5.2). Pritom je poželjno da izrazi budu potpuni, što znači da u polinomu odgovarajućeg stupnja moraju biti sadržani i svi pripadni članovi nižega stupnja. Budući da je rješenje (5.3) u općem slučaju približno, njegovim uvrštavanjem u jednadžbu (5.1) pojavit će se ostatak ili rezidual

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\,\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{q}. \tag{5.5}$$

Ako je rješenje (5.3) točno, matrica reziduala $\mathbf{R}$ jednaka je nul-matrici. Zadatak je metode težinskog reziduala odrediti nepoznate parametre a_i na taj način da ostatak $\mathbf{R}$ u razmatranom području V poprimi dovoljno malu vrijednost. Uvođenjem linearno neovisnih težinskih funkcija, veličine a_i izračunavaju se iz uvjeta da je težinska prosječna vrijednost ostatka u području V jednaka nuli

$$\int_V \mathbf{W}\mathbf{R}\,\mathrm{d}V = 0\,, \tag{5.6}$$

gdje je $\mathbf{W}$ matrica težinskih funkcija W_i za $i = 1,2...n$. Ako su parametri a_i konstantne veličine, relacija (5.6) je sustav od n algebarskih jednadžbi. Ovisno o definiranju težinskih funkcija, razlikuje se više metoda težinskog reziduala. Ako je $W_i = f_i$ za $i = 1,2...n$, govorimo o Galerkinovoj metodi. Kad su težinske funkcije jednake parcijalnim derivacijama reziduala po nepoznatim parametrima, $W_i = \partial R / \partial a_i$, radi se o metodi najmanjih kvadrata. Ako su funkcije W_i jednake Diracovim delta-funkcijama, metode su kolokacijske, pri čemu se relacija (5.6) svodi na uvjet da je ostatak u n odabranih točaka odnosno potpodručja jednak nuli. Više o tim metodama može se naći u [13, 33, 51].

Primjenom Galerkinova postupka, matrica koeficijenata u sustavu algebarskih jednadžbi je simetrična i pozitivno definitna kad je diferencijalni operator simetričan i pozitivno definitan [13]. Kod metode najmanjih kvadrata matrica sustava jednadžbi uvijek je simetrična neovisno o svojstvima diferencijalnog operatora. U kolokacijskim metodama nesimetrična matrica može proizići i u slučaju kad je diferencijalni operator simetričan i pozitivno definitan.

Potrebno je uočiti da u svim spomenutim metodama pretpostavljene približne funkcije moraju zadovoljavati sve rubne uvjete. Ako je u diferencijalnoj jednadžbi najveća derivacija reda $2m$, u rubnim uvjetima pojavljuju se derivacije do reda $2m$-1. Potreban red derivacije moguće je u Galerkinovoj metodi smanjiti primjenom parcijalne integracije. Pritom parcijalna integracija omogućuje uključivanje u formulaciju prirodnih rubnih uvjeta te odabrane interpolacijske funkcije moraju zadovoljavati samo geometrijske rubne uvjete. Za razliku od Galerkinove metode, u metodi najmanjih kvadrata pomoću parcijalne integracije nije moguće smanjiti red derivacije jer težinske funkcije i rezidual sadrže derivacije istoga reda.

U formulaciju je moguće uključiti rubne uvjete sila proširivanjem metode težinskog reziduala i za ispunjavanje uvjeta (5.2). Uvrštavanjem približnih relacija (5.3) u (5.2), u općem slučaju izračunava se ostatak $\mathbf{R}_B$ čija težinska prosječna vrijednost na rubu također mora biti jednaka nuli. Na taj se način sustav algebarskih jednadžbi za izračunavanje nepoznatih parametara a_i dobiva pomoću sljedeće relacije:

$$\int_V \mathbf{W}\mathbf{R}\,\mathrm{d}V + \int_S \mathbf{W}\mathbf{R}_B\,\mathrm{d}S = 0\,. \tag{5.7}$$

Nije teško zaključiti da primjena Galerkinove metode ima prednosti u odnosu na ostale spomenute metode. Zbog boljeg razumijevanja, korisno je tu metodu prikazati za rješavanje jednodimenzijskih problema. U tom slučaju rješenje (5.3) jednodimenzijske diferencijalne jednadžbe moguće je napisati u obliku

$$\overline{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) a_i\,. \tag{5.8}$$

Nakon određivanja reziduala za pretpostavljenu funkciju $\overline{w}(x)$, relacija (5.6) postaje

$$\int_\ell R\left[\overline{w}(x)\right] f_i(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad i = 1,2...n \tag{5.9}$$

gdje je ℓ područje na koje se odnosi diferencijalna jednadžba. Diferencijalni operator za rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela, na temelju (3.46), jednak je

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}_e\,\mathbf{D}\mathbf{D}_k\,. \tag{5.10}$$

Vektor zavisnih varijabli $\mathbf{u}$ opisan je komponentama pomaka, a poznata funkcija $\mathbf{q}$ vektor je vanjskih sila. U rubnim uvjetima (5.2) operator $\mathbf{B}$ je na temelju (3.47) jednak

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_q\,\mathbf{D}\mathbf{D}_k\,, \tag{5.11}$$

a $\mathbf{q}_b$ je vektor zadanog vanjskog opterećenja. Pomoću izraza (5.10) i (5.11) te relacija prikazanih u odjeljku 3.4.3., izvode se diferencijalne jednadžbe za rješavanje problema savijanja štapa prema slici 3.7. Jednadžba (5.1) diferencijalna je jednadžba elastične crte

$$EI_y \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} - q_z = 0\,, \tag{5.12}$$

koja je izvedena uz Bernoullijeve pretpostavke u teoriji savijanja štapa, a čini uvjet ravnoteže izražen pomoću pomaka. Relacija (5.2) opisuje rubne uvjete sila

$$EI_y \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -M_{by}\,,$$
$$EI_y \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -F_{bz}\,. \tag{5.13}$$

Ako se rješenje diferencijalne jednadžbe (5.12) pretpostavi u obliku (5.8), prema (5.9) izvodi se sljedeća relacija za izračunavanje nepoznatih parametara:

$$\int_0^{\ell}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^4\overline{w}}{\mathrm{d}x^4}-q_z\right)f_i\,\mathrm{d}x=0 \qquad i=1,2...n\,. \tag{5.14}$$

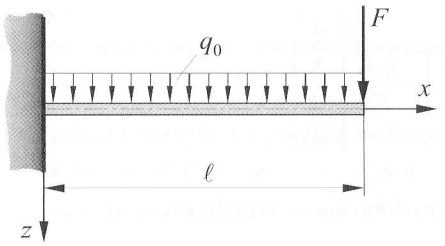
Ovdje je najveći red derivacije $2m=4$, a u rubnim uvjetima sila pojavljuju se derivacije do trećeg reda $(2m-1=3)$. Kao što je prije spomenuto, potreban red derivacije moguće je smanjiti primjenom parcijalne integracije. Ako se u izrazu (5.14) parcijalna integracija provede dva puta, dobiva se

$$\int_0^{\ell}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2f_i}{\mathrm{d}x^2}-q_zf_i\right)\mathrm{d}x+\left[f_iEI_y\frac{\mathrm{d}^3\overline{w}}{\mathrm{d}x^3}\right]_0^{\ell}-\left[\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}EI_y\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}}{\mathrm{d}x^2}\right]_0^{\ell}=0\,,\quad i=1,2...n\,. \tag{5.15}$$

Drugi i treći član u uglatim zagradama pokazuju da su rubni uvjeti sila (5.13) uključeni u formulaciju, pa funkcije f_i sada moraju zadovoljiti samo geometrijske rubne uvjete gdje je najveća derivacija prvog reda $(m-1=1)$.

Primjer 5.1. Za konzolni nosač konstantne fleksijske krutosti EI_y zadan i opterećen prema slici P5.1.1., potrebno je primjenom Galerkinove metode izračunati progib na slobodnom kraju te raspodjelu poprečnih sila i momenata savijanja.

Zadano: $q_0, F=q_0\ell, EI_y, \ell$



Slika P5.1.1. Konzolni nosač

Diferencijalna jednadžba elastične crte pri problemu savijanja štapa opisana je relacijom (5.12), a njezino rješavanje provest će se pomoću izraza (5.15). Funkcija pomaka, koja zadovoljava geometrijske rubne uvjete $\overline{w}=0$ i $\dfrac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x}=0$ za $x=0$, jednaka je

$$\overline{w}=\sum_{i=1}^{2}a_if_i=a_1x^2+a_2x^3\,. \tag{a}$$

Prirodni rubni uvjeti ili rubni uvjeti sila za $x = \ell$ jesu

$$EI_y \frac{\mathrm{d}^3 \overline{w}}{\mathrm{d}x^3} = -F,$$
$$EI_y \frac{\mathrm{d}^2 \overline{w}}{\mathrm{d}x^2} = 0. \tag{b}$$

Budući da je za $x = 0$, $f_i = \dfrac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x} = 0$, a $q_z = q_0$, relacija (5.15) može se napisati u obliku

$$\int_0^\ell \left(EI_y \frac{\mathrm{d}^2 \overline{w}}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 f_i}{\mathrm{d}x^2} - q_0 f_i \right) \mathrm{d}x - \left[f_i F \right]_{x=\ell} = 0, \qquad i = 1,2. \tag{c}$$

Na temelju pretpostavljene funkcije pomaka (a), izraz (c) transformira se u dvije jednadžbe s dvije nepoznate konstante a_1 i a_2

$$\int_0^\ell \left[EI_y \left(2a_1 + 6a_2 x \right) 2 - q_0 x^2 \right] \mathrm{d}x - \left[x^2 F \right]_{x=\ell} = 0,$$
$$\int_0^\ell \left[EI_y \left(2a_1 + 6a_2 x \right) 6x - q_0 x^3 \right] \mathrm{d}x - \left[x^3 F \right]_{x=\ell} = 0, \tag{d}$$

iz čega slijedi, nakon integriranja i uvrštavanja $F = q_0 \ell$, sustav algebarskih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 4\ell & 6\ell^2 \\ 6\ell^2 & 12\ell^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{q_0 \ell^3}{EI_y} \begin{bmatrix} \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{5\ell}{4} \end{bmatrix}. \tag{e}$$

Njegovim rješavanjem dobivaju se vrijednosti za a_1 i a_2

$$a_1 = \frac{17}{24} \frac{q_0 \ell^2}{EI_y},$$
$$a_2 = -\frac{1}{4} \frac{q_0 \ell}{EI_y}. \tag{f}$$

Uvrštavanjem (f) u (a) dobiva se funkcija pomaka u obliku

$$\overline{w} = \frac{q_0 \ell^4}{24 EI_y} \left(17 \frac{x^2}{\ell^2} - 6 \frac{x^3}{\ell^3} \right). \tag{g}$$

Točno rješenje koje se izračunava metodom integriranja diferencijalne jednadžbe elastične crte [3] jednako je

$$w = \frac{q_0 \ell^4}{24 E I_y}\left(18\frac{x^2}{\ell^2} - 8\frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4}\right). \tag{h}$$

Raspodjela poprečnih sila $\bar{Q}_z$ i momenata savijanja $\bar{M}_y$ izračunava se pomoću relacija

$$\begin{aligned} \bar{Q}_z &= -EI_y \frac{\mathrm{d}^3 \bar{w}}{\mathrm{d}x^3}, \\ \bar{M}_y &= -EI_y \frac{\mathrm{d}^2 \bar{w}}{\mathrm{d}x^2}. \end{aligned} \tag{i}$$

Uvrštavanjem (g) u (i) dobiva se

$$\begin{aligned} \bar{Q}_z &= \frac{3}{2} q_0 \ell, \\ \bar{M}_y &= -\frac{q_0 \ell^2}{12}\left(17 - 18\frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \tag{j}$$

Točna rješenja jednaka su

$$\begin{aligned} Q_z &= 2q\ell - qx, \\ M_y &= -\frac{q\ell^2}{2}\left(3 - 4\frac{x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2}\right). \end{aligned} \tag{k}$$

Rezultati dobiveni primjenom Galerkinove metode uspoređeni su s točnim rješenjima na slici P5.1.2.

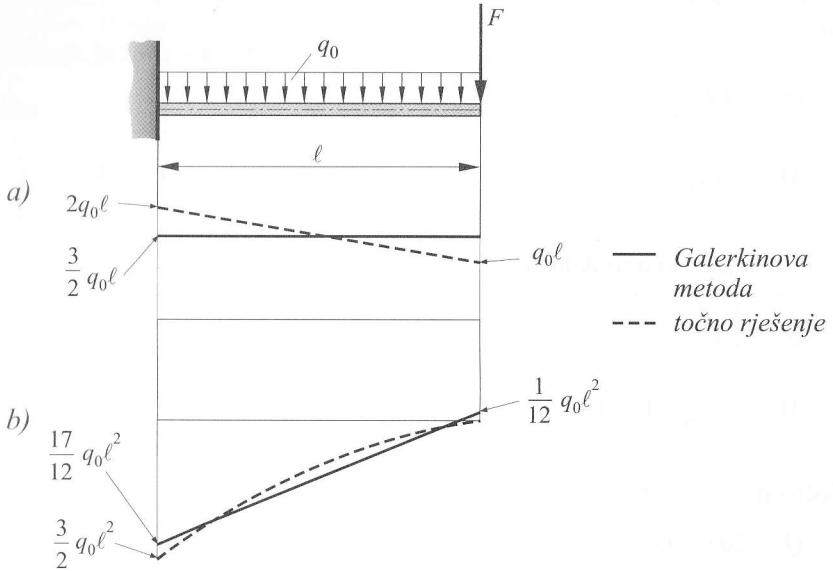
Potrebno je uočiti da su jednake vrijednosti progiba na kraju konzole dobivene Galerkinovom metodom i metodom integriranja diferencijalne jednadžbe elastične linije

$$\bar{w}(x = \ell) = w(x = \ell) = \frac{11}{24}\frac{q_0 \ell^4}{EI_y}. \tag{l}$$

Najveća odstupanja pojavljuju se pri izračunavanju poprečnih sila, što pokazuje da greška raste s povećanjem reda derivacije pretpostavljene funkcije pomaka. Odstupanja između točnih rješenja i rješenja koja se izračunavaju Galerkinovom metodom u pojedinim točkama razmatranog područja su znatna. Nasuprot tome, ukupan zbroj rješenja preko cijelog područja konstrukcije po približnoj i po točnoj metodi je jednak

$$\int_0^\ell Q_z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell \bar{Q}_z(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{m}$$

$$\int_0^\ell M_y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell \bar{M}_y(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{n}$$



Slika P5.1.2. Konzolni nosač zajedno s dijagramima raspodjele:
a) poprečnih sila, b) momenata savijanja

Nije teško provjeriti da su površine u dijagramima raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja za Galerkinovu metodu i za točno rješenje međusobno jednake. Iz ovdje izloženog izvodi se zaključak da u prikazanoj Galerkinovoj metodi diferencijalna jednadžba (5.12) nije zadovoljena u svakoj pojedinoj točki konstrukcije, već je zadovoljena samo u integralnom obliku kad se razmatra cijelo područje. Uvjeti ravnoteže zadovoljeni su samo u prosječnom smislu, a nisu zadovoljeni u pojedinim točkama konstrukcije. Točnost rješenja moguće je poboljšati dodavanjem članova višeg reda u pretpostavljenoj funkciji pomaka.

5.2. Rayleigh-Ritzova metoda

Rayleigh-Ritzova metoda temelji se na varijacijskoj formulaciji problema. Za razliku od metode težinskog reziduala gdje se rješava diferencijalna jednadžba, tu je potrebno zadovoljiti uvjet stacionarnosti funkcionala koji opisuje razmatrani problem. Isto kao i u prethodnom odjeljku, nepoznata funkcija pretpostav-

lja se u obliku sume umnoška linearno neovisnih funkcija f_i i nepoznatih parametara a_i, što je prikazano matričnom relacijom (5.3). Budući da se uzima funkcional u kojemu su sadržani prirodni rubni uvjeti, dovoljno je da pretpostavljena funkcija zadovoljava samo geometrijske rubne uvjete. Nepoznate veličine izračunavaju se iz uvjeta stacionarnosti funkcionala.

Za rješavanje problema u mehanici elastičnih tijela, funkcional je jednak ukupnoj potencijalnoj energiji, a stacionarna vrijednost odgovara njezinoj minimalnoj vrijednosti. Vektor zavisnih varijabli jednak je pomaku s komponentama u, v i w u pravcu Kartezijeva koordinatnog sustava, te se matrična relacija (5.3) može transformirati u oblik

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \sum_{i=1}^{\ell} a_i f_i(x,y,z), \\ \overline{v} &= \sum_{i=\ell+1}^{m} a_i f_i(x,y,z), \\ \overline{w} &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i f_i(x,y,z). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Komponente pomaka najčešće se aproksimiraju polinomima ili trigonometrijskim funkcijama. Kao i u metodi težinskog reziduala, kako bi se osiguralo približavanje k točnom rješenju s povećavanjem broja članova, poželjno je da ti izrazi budu potpuni. To znači da ako su prisutni odgovarajući članovi višeg reda, potrebno je da budu uključeni i svi pripadni članovi nižeg reda.

Uvrštavanjem (5.16) u izraze za potencijalnu energiju elastičnoga deformiranja (4.13) i potencijalnu energiju vanjskih sila (4.15), dobiva se ukupna potencijalna energija kao funkcija nepoznatih parametara

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{5.17}$$

Princip minimuma ukupne potencijalne energije opisan je relacijom

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial a_n}\delta a_n = 0, \tag{5.18}$$

iz koje slijedi n algebarskih jednadžbi

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5.19}$$

Rješenja sustava jednadžbi (5.19) su parametri a_i koji pomoću (5.16) opisuju polje pomaka u razmatranom području. Na taj način dobivaju se najbolja mogu-

ća rješenja za pretpostavljene funkcije, tj. rješenja za koja je potencijalna energija najbliža minimumu. Točnost rješenja povećava se s brojem članova u izrazu (5.16). Kad izrazi nisu potpuni, može se dogoditi da nije moguće postići približavanje točnom rješenju. Ako oblik pretpostavljenih funkcija odgovara točnoj raspodjeli pomaka, pomoću (5.19) izračunavaju se parametri za koje ukupna potencijalna energija ima minimalnu vrijednost. U tom slučaju, uvjeti ravnoteže i prirodni rubni uvjeti koji opisuju rubne uvjete sila u potpunosti su zadovoljeni. U općem slučaju kad su rješenja približna, potencijalna energija ima nešto veću vrijednost od točnog rješenja koje opisuje minimum, što pokazuje da približna rješenja čine konstrukciju krućom od stvarne konstrukcije. Ovako dobiveni pomaci manji su od stvarnih pomaka. Uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila koji su uključeni u funkcional zadovoljeni su samo u prosječnom ili integralnom smislu kad se promatra cijelo područje, a nisu zadovoljeni u svakoj točki razmatranog kontinuuma, što je sličnost s Galerkinovom metodom težinskog reziduala. Prednost Rayleigh-Ritzove metode u odnosu na Galeriknovu metodu u tome je što se u podintegralnoj funkciji pojavljuje derivacija nižeg reda, a potrebno je da pretpostavljena funkcija zadovoljava samo geometrijske rubne uvjete, gdje je za C^{m-1} varijacijski problem najveći red derivacije $m-1$. Uz to, matrica koeficijenata u sustavu algebarskih jednadžbi uvijek je simetrična, što se s Galerkinovom metodom dobiva nakon primjene parcijalne integracije. Rayleigh-Ritzova metoda može se primijeniti samo u slučaju kad se razmatrani problem može opisati funkcionalom, što se može smatrati nedostatkom u odnosu na Galerkinovu metodu.

Kao i u prethodnom odjeljku, korisno je prikazati relacije za rješavanje jednodimenzijskih problema, pa će se i ovdje razmatrati problem savijanja štapa. Ako je štap po jedinici duljine opterećen poprečnim kontinuiranim opterećenjem q_z, a na jednom njegovu kraju, za $x=\ell$, djeluje opterećenje $\mathbf{q}_b^T=\begin{bmatrix}F_{bz} & M_{by}\end{bmatrix}$, ukupna potencijalna energija prema (4.17), uz pomoć izraza iz odjeljka 3.4.3., može se prikazati u obliku

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^\ell EI_y\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^\ell wq_z\,\mathrm{d}x-\left[wF_{bz}\right]_{x=\ell}-\left[-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}M_{by}\right]_{x=\ell}. \qquad (5.20)$$

Pretpostavlja se da je funkcija pomaka opisana relacijom (5.8) pa se njezinim uvrštavanjem u (5.20) dobiva

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^\ell EI_y\left(\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}^2 f_i}{\mathrm{d}x^2}a_i\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^\ell\left(\sum_{i=1}^n f_i a_i\right)q_z\,\mathrm{d}x-$$
$$-\left[\left(\sum_{i=1}^n f_i a_i\right)F_{bz}\right]_{x=\ell}-\left[-\left(\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}a_i\right)M_{by}\right]_{x=\ell}. \qquad (5.21)$$

Nakon deriviranja prema (5.19), izvodi se izraz

$$\int_0^\ell EI_y \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^2 f_i}{\mathrm{d}x^2} a_i \right] \frac{\mathrm{d}^2 f_j}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x - \int_0^\ell f_j q_z \, \mathrm{d}x - \left[f_j F_{bz} \right]_{x=\ell} + \\ + \left[\frac{\mathrm{d} f_j}{\mathrm{d}x} M_{by} \right]_{x=\ell} = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{5.22}$$

koji čini sustav od n jednadžbi s n nepoznatih parametara. Lako je zaključiti da je taj izraz jednak izrazu (5.15) uz pretpostavku da je opterećenje na rubu $x = 0$ jednako nuli i uz uvođenje supstitucije za rubne uvjete (5.13). Izraz (5.15) izveden je primjenom Galerkinove metode uz dvostruku parcijalnu integraciju. Na taj način pokazano je da se Rayleigh-Ritzovom metodom i Galerkinovom metodom uz primjenu parcijalne integracije dolazi do istih relacija. To će se pokazati i u sljedećem primjeru koji je u prethodnom odjeljku riješen Galerkinovom metodom.

Primjer 5.2. Za konzolni nosač prikazan u primjeru 5.1. potrebno je primjenom Rayleigh-Ritzove metode izračunati funkciju pomaka koja opisuje njegovu elastičnu crtu.

Pretpostavljeni izraz za funkciju pomaka koja zadovoljava geometrijske rubne uvjete jednak je kao i u primjeru 5.1.

$$\overline{w} = a_1 x^2 + a_2 x^3 . \tag{a}$$

Energija elastičnog deformiranja jednaka je

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI_y \left(\frac{\mathrm{d}^2 \overline{w}}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \mathrm{d}x . \tag{b}$$

Uvrštavanjem (a) u (b) dobiva se

$$\Pi_i = \frac{EI_y}{2} \int_0^\ell \left(2a_1 + 6a_2 x \right)^2 \mathrm{d}x . \tag{c}$$

Potencijalna energija vanjskih sila izračunava se pomoću relacije

$$\Pi_e = -\int_0^\ell \overline{w} q_z \, \mathrm{d}x - \left[\overline{w} F \right]_{x=\ell} , \tag{d}$$

a pomoću (a), uz supstituciju $q_z = q_0$, može se napisati u obliku

$$\Pi_e = -q_0 \int_0^{\ell} \left(a_1 x^2 + a_2 x^3\right) \mathrm{d}x - F\left(a_1 \ell^2 + a_2 \ell^3\right). \tag{e}$$

Nakon provođenja integracije u (c) i (e), te uvrštavanjem $F = q_0 \ell$, ukupna potencijalna energija prikazuje se kao funkcija nepoznatih parametara

$$\Pi = EI_y \left(2\ell a_1^2 + 6\ell^2 a_1 a_2 + 6\ell^3 a_2^2\right) - q_0 \left(\frac{4}{3}\ell^3 a_1 + \frac{5}{4}\ell^4 a_2\right). \tag{f}$$

Iz uvjeta $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ i $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$ dobiva se sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 4\ell & 6\ell^2 \\ 6\ell^2 & 12\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{q_0 \ell^3}{E I_y} \begin{bmatrix} \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{5\ell}{4} \end{bmatrix} \tag{g}$$

koji je potpuno jednak sustavu (e) u primjeru 5.1. Rješenja su jednaka izrazima (f), a funkcija pomaka jednaka je relaciji (g) u spomenutom primjeru

$$\overline{w} = \frac{q_0 \ell^4}{24 E I_y} \left(17 \frac{x^2}{\ell^2} - 6 \frac{x^3}{\ell^3}\right). \tag{h}$$

Na način kao što je prikazano u prethodnom odjeljku, izračunavaju se poprečne sile i momenti savijanja. Njihova raspodjela opisana je izrazima (j) u primjeru 5.1., a grafički prikaz je na slici P5.1.2.

6. DIREKTNA FORMULACIJA KONAČNIH ELEMENATA

Za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela primjenom metode konačnih elemenata, potrebno je izvesti jednadžbe koje opisuju međusobnu ovisnost sila u čvorovima konačnog elementa i pripadnih pomaka. Ovdje će se prikazati direktni postupak, pri čemu se matrica krutosti koja povezuje čvorne sile s pomacima izvodi pomoću osnovnih relacija teorije elastičnosti. Postupak izvođenja moguće je podijeliti u nekoliko sljedećih koraka.

- Raspodjela pomaka u elementu prikazuje se ovisno o pomacima u čvorovima:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{6.1}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika koje opisuju oblik raspodjele pomaka. Pomaci u čvorovima $\mathbf{v}$ stupnjevi su slobode konačnog elementa.

- Pomoću kinematičkih relacija potrebno je naći vezu između deformacije u elementu i pomaka u čvorovima:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{u} \\ &\qquad \mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v} \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}\,\mathbf{v} = \mathbf{B}\,\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

gdje je $\mathbf{B}$ matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima, a često se rabi i naziv matrica funkcija oblika za deformacije.

- Primjenom konstitutivnih jednadžbi izvodi se relacija u kojoj je naprezanje u elementu povezano s pomacima u čvorovima:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\mathbf{v} \\ &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

- Naprezanje duž rubova konačnog elementa potrebno je zamijeniti statički ekvivalentnim silama u čvorovima, pri čemu se dobiva sljedeća relacija:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}, \tag{6.4}$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica međusobne ovisnosti naprezanja i čvornih sila.

- Primjenom gornjih relacija izvodi se matrica krutosti $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma} \\ &\underline{\qquad\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{v}} \\ &\mathbf{F} = \mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{v} = \mathbf{k}\,\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

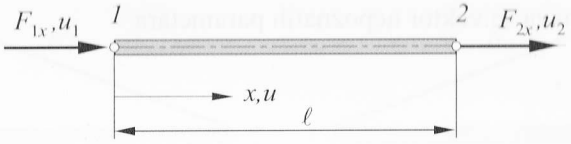
Potrebno je uočiti da prilikom izvođenja matrice krutosti nisu korištene relacije koje opisuju uvjete ravnoteže unutar elementa, što je razlog da ti uvjeti u općem slučaju ne moraju biti zadovoljeni. Osim toga, prikazana matrica krutosti u općem slučaju nije simetrična, jer uz simetričnu matricu $\mathbf{D}$ u relaciji (6.5) u općem slučaju ne vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$, što je uvjet za izračunavanje simetrične matrice. Iz direktne formulacije nije moguće izvesti potrebne rubne uvjete, odnosno uvjete kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata, već ih je potrebno odrediti na temelju fizikalnoga razmatranja problema. Ta metoda ne može se primijeniti u slučaju složenijeg opterećenja, kao i pri rješavanju problema s početnim deformacijama te problema stabilnosti i vibracija.

Usprkos navedenim nedostacima, direktnu metodu moguće je primijeniti za izvođenje matrice krutosti jednostavnijih konačnih elemenata. Ona u znatnoj mjeri pridonosi razumijevanju metode konačnih elemenata, što je prednost u odnosu na ostale formulacije. U idućem izlaganju prikazat će se izvođenje osnovnoga konačnog elementa za rješavanje jednodimenzijskih problema, te trokutnog elementa za slučaj ravninskog stanja naprezanja. Složenije i mnogo općenitije metode za izvođenje jednadžbe konačnog elementa jesu rezidualne i varijacijske metode.

6.1. Osnovni štapni element

U svrhu boljeg razumijevanja direktne metode ovdje će se izvesti matrica krutosti za osno opterećeni štapni konačni element s dva stupnja slobode, slika 6.1. Stupnjevi slobode osni su pomaci u čvorovima

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad u_2]. \tag{6.6}$$



Slika 6.1. Štapni konačni element s dva stupnja slobode

Raspodjela pomaka u elementu opisana je linearnim polinomom

$$u = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Simbolički se relacija (6.7) može prikazati u obliku

$$\mathbf{u} = \alpha \, \mathbf{a}, \tag{6.8}$$

gdje je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Vektor nepoznatih parametara $\mathbf{a}$ određuje se pomoću rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad u = u_1, \\ &x = \ell, \quad u = u_2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Uvrštavanjem (6.10) u (6.7), dobiva se

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1, \\ u_2 &= a_1 + a_2 \ell, \end{aligned} \tag{6.11}$$

što je prikazano u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

ili simbolički

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \, \mathbf{a}, \tag{6.13}$$

gdje je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix}. \tag{6.14}$$

Iz (6.13) izračunava se vektor nepoznatih parametara

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}, \tag{6.15}$$

gdje je

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} \ell & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.16}$$

Uvrštavanjem (6.15) u (6.8), dobiva se

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{v}, \tag{6.17}$$

iz čega slijedi izraz za matricu funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{C}^{-1}. \tag{6.18}$$

Na temelju (6.9) i (6.16) izračunava se

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix}, \tag{6.19}$$

gdje su funkcije oblika

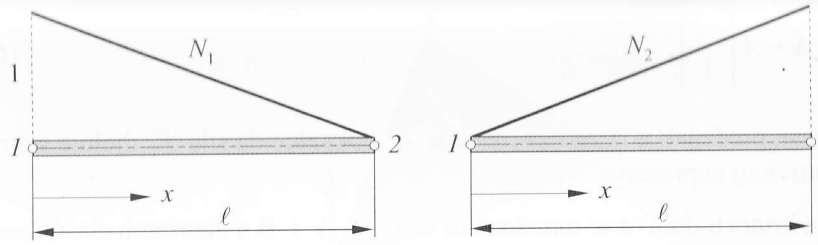
$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{\ell}, \\ N_2 &= \frac{x}{\ell}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Na taj način, matrica funkcija oblika jednaka je

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Uvrštavanjem koordinata čvorova štapnog elementa u relacije (6.20) dobiva se $N_1 = 1$ i $N_2 = 0$ za koordinatu čvora *1*, a za čvor *2* funkcije su oblika $N_1 = 0$ i $N_2 = 1$. To pokazuje osnovno svojstvo funkcija oblika da je za čvor konačnog elementa s pripadnim stupnjem slobode v_i funkcija oblika N_i jednaka jedinici, a u svim ostalim čvorovima njezin iznos jednak je nuli. To je ujedno i uvjet za ispunjavanje rubnih uvjeta u čvorovima konačnog elementa. Funkcije N_1 i N_2 za štapni konačni element grafički su prikazane na slici 6.2. Na temelju (6.17), raspodjela pomaka u elementu može se prikazati pomoću funkcija oblika i pripadnih stupnjeva slobode

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2. \tag{6.22}$$



Slika 6.2. Funkcije oblika za štapni konačni element

Međusobna ovisnost deformacije u elementu i stupnjeva slobode u čvorovima opisana je prema (6.2) pomoću matrice $\mathbf{B}$. U skladu s relacijama za osno opterećeni štap prikazanim u odjeljku 3.4.1. dobiva se

$$\mathbf{B} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\left[N_1 \quad N_2\right]. \tag{6.23}$$

Na taj način članovi matrice $\mathbf{B}$ izračunavaju se deriviranjem funkcija oblika

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}. \tag{6.24}$$

Uvrštavanjem (6.20) u (6.24) dobiva se

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

Naprezanje u konačnom elementu izračunava se pomoću relacije prikazane u (6.3). Za izvođenje matrice krutosti potrebno je provesti transformaciju naprezanja u čvorne sile. Za osno opterećeni štapni element čvorne sile su jednake

$$\mathbf{F}^T = \left[F_1 \quad F_2\right], \tag{6.26}$$

a izračunavaju se množenjem naprezanja s površinom poprečnog presjeka elementa

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\sigma_x, \tag{6.27}$$

što se simbolički na temelju (6.5) može napisati u obliku

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \tag{6.28}$$

gdje je matrica $\mathbf{A}$ jednaka

$$\mathbf{A} = A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Negativan predznak u izrazu za matricu $\mathbf{A}$ pokazuje da sila F_1 djeluje suprotno od pozitivnog naprezanja σ_x.

Matrica krutosti dobiva se množenjem matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ s matricom elastičnosti $\mathbf{D}$

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}. \tag{6.30}$$

Za osno opterećeni štapni element matrica elastičnosti je jednaka

$$\mathbf{D} = [E], \tag{6.31}$$

gdje je E Youngov modul elastičnosti, pa se na temelju (6.25) i (6.29) matrica krutosti izračunava u obliku

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

Budući da je u konačnom elementu polje naprezanja konstantno, uvjet ravnoteže unutar elementa zadovoljen je iako nije u prikazanoj formulaciji direktno razmatran.

6.2. Osnovni trokutni element

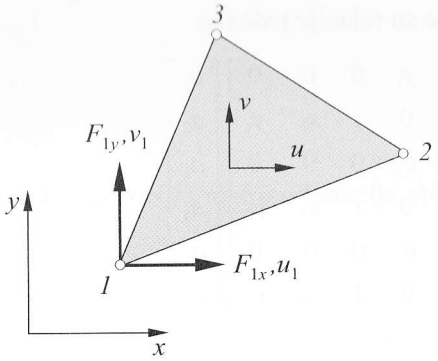
Osnovni trokutni konačni element s tri čvora i šest stupnjeva slobode, proizvoljno orijentiran u koordinatnom sustavu x, y, prikazan je na slici 6.3. Polje pomaka opisano je potpunim linearnim polinomima

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y. \tag{6.33}$$

Relacije (6.33) mogu se prikazati u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}, \tag{6.34}$$



Slika 6.3. Osnovni trokutni konačni element

ili simbolički

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}, \tag{6.35}$$

gdje je

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}, \tag{6.36}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}, \tag{6.37}$$

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}. \tag{6.38}$$

Lako je zaključiti da je broj nepoznatih parametara jednak ukupnom broju stupnjeva slobode konačnog elementa. U skladu s rubnim uvjetima, za čvorove prema slici 6.3. određene koordinatama $x = x_i$ i $y = y_i$ komponente pomaka su $u = u_i$ i $v = v_i$ (i=1,2,3), pa se pomoću (6.33) dobiva

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1, \\ v_1 &= a_4 + a_5 x_1 + a_6 y_1, \\ u_2 &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2, \\ v_2 &= a_4 + a_5 x_2 + a_6 y_2, \\ u_3 &= a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3, \\ v_3 &= a_4 + a_5 x_3 + a_6 y_3. \end{aligned} \tag{6.39}$$

U matričnom zapisu te su relacije jednake

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

odnosno

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\,\mathbf{a}, \tag{6.41}$$

gdje je vektor pomaka u čvorovima elemenata

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3], \tag{6.42}$$

a matrica **C** je jednaka

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}. \tag{6.43}$$

Vektor nepoznatih parametara određuje se pomoću relacije

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}, \tag{6.44}$$

gdje je

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_2 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \tag{6.45}$$

U ovom izrazu A opisuje površinu trokutnog elementa koja se može prikazati pomoću determinante

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{6.46}$$

Uvrštavanjem (6.37) i (6.45) u izraz za matricu funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{C}^{-1}, \tag{6.47}$$

izračunava se

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \tag{6.48}$$

gdje su funkcije oblika

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A}\left[x_2y_3 - x_3y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)\right], \\ N_2 &= \frac{1}{2A}\left[x_3y_1 - x_1y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)\right], \\ N_3 &= \frac{1}{2A}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)\right]. \end{aligned} \tag{6.49}$$

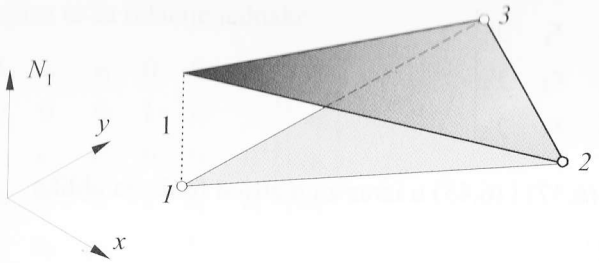
Korisno je uvesti supstituciju

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = x_2y_3 - x_3y_2, && \alpha_2 = x_3y_1 - x_1y_3, && \alpha_3 = x_1y_2 - x_2y_1, \\ &\beta_1 = y_2 - y_3, && \beta_2 = y_3 - y_1, && \beta_3 = y_1 - y_2, \\ &\gamma_1 = x_3 - x_2, && \gamma_2 = x_1 - x_3, && \gamma_3 = x_2 - x_1. \end{aligned} \tag{6.50}$$

koja omogućuje kraće zapisivanje funkcija oblika

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\alpha_i + x\beta_i + y\gamma_i\right), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.51}$$

Lako je uočiti da je raspodjela funkcija oblika po konačnom elementu linearna. Funkcija oblika N_1 grafički je prikazana na slici 6.4., a analogno se prikazuju i ostale funkcije.



Slika 6.4. Funkcija oblika N_1

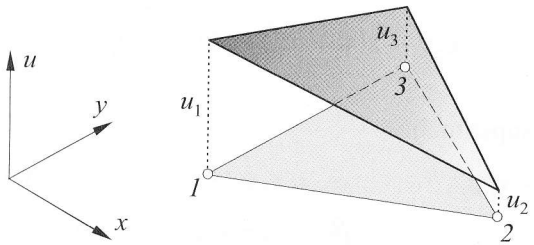
Pomaci u elementu sad se mogu prikazati ovisno o pomacima u čvorovima

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{6.52}$$

što se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3\,, \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3\,. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Raspodjela komponente pomaka u grafički je prikazana na slici 6.5. Pomak v moguće je prikazati na analogan način.



Slika 6.5. Raspodjela pomaka u po elementu

Matrica $\mathbf{B}$ koja opisuje raspodjelu deformacije izračunava se pomoću relacije

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}\,, \tag{6.54}$$

gdje je kinematički diferencijalni operator za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije prikazan izrazom (3.52). Njegovim uvrštavanjem u gornju relaciju, te uz supstituciju prema (6.48), dobiva se

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{6.55}$$

Uvrštavanjem (6.49) u (6.55) izračunava se

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix}. \tag{6.56}$$

Primjenom supstitucije prema (6.50), matrica **B** kraće se može zapisati u obliku

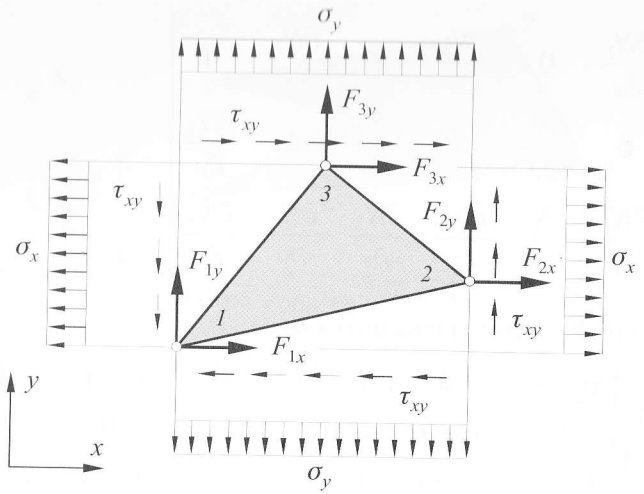
$$\mathbf{B}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix}. \tag{6.57}$$

Izrazi (6.56) i (6.57) pokazuju da je u elementu polje deformacije konstantno, pa je i polje naprezanja također konstantno. Ovdje se pretpostavlja ravninsko stanje naprezanja pa je matrica elastičnosti **D** opisana relacijom (3.50). Komponente naprezanja grafički su prikazane na slici 6.6.

Za izračunavanje matrice **A** potrebno je komponente naprezanja duž rubova trokutnog elementa transformirati u čvorne sile. Na taj način za silu u prvom čvoru prema slici 6.6. dobivaju se komponente u pravcu koordinatnih osi x i y

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{h}{2}\left[\sigma_x(y_2-y_3)+\tau_{xy}(x_3-x_2)\right], \\ F_{1y} &= \frac{h}{2}\left[\sigma_y(x_3-x_2)+\tau_{xy}(y_2-y_3)\right], \end{aligned} \tag{6.58}$$

gdje je h debljina trokutnog elementa.



Slika 6.6. Naprezanja u trokutnom elementu

Nakon izračunavanja sila u ostalim čvorovima, moguće je napisati matričnu relaciju koja povezuje komponente čvornih sila s komponentama naprezanja

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

iz čega, nakon uvođenja supstitucije prema (6.50), slijedi matrica **A**

$$\mathbf{A} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix}. \tag{6.60}$$

Množenjem matrica (6.60), (3.50) i (6.57) prema (6.5), izračunava se matrica krutosti. Njezini članovi prikazani su u izrazu (6.61).

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
\beta_1^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1^2 & \nu\beta_1\gamma_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_1 & \beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\gamma_2 & \nu\beta_1\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\gamma_3 & \nu\beta_1\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\beta_3 \\
\nu\gamma_1\beta_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_1 & \gamma_1^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1^2 & \nu\beta_2\gamma_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\beta_2 & \nu\beta_3\gamma_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_3 & \gamma_1\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\beta_3 \\
\beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\gamma_2 & \nu\beta_2\gamma_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_2 & \beta_2^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2^2 & \nu\beta_2\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\gamma_2 & \beta_2\beta_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2\gamma_3 & \nu\beta_2\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3\gamma_2 \\
\nu\beta_1\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\beta_2 & \nu\beta_2\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\gamma_2 & \gamma_2^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2^2 & \nu\beta_3\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\gamma_3 & \gamma_2\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\beta_3 \\
\beta_1\beta_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1\gamma_3 & \nu\beta_3\gamma_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\gamma_3 & \beta_2\beta_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2\gamma_3 & \nu\beta_3\gamma_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\gamma_3 & \beta_3^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_3^2 & \nu\beta_3\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3\gamma_3 \\
\nu\beta_1\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3\gamma_1 & \gamma_1\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1\beta_3 & \nu\beta_2\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3\gamma_2 & \gamma_2\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2\beta_3 & \nu\beta_3\gamma_3 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3\gamma_3 & \gamma_3^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3^2
\end{bmatrix} \tag{6.61}$$

Matrica krutosti simetrična je matrica, a njezin red je jednak ukupnom broju stupnjeva slobode konačnog elementa.

Naprezanja u elementu izračunavaju se pomoću izraza

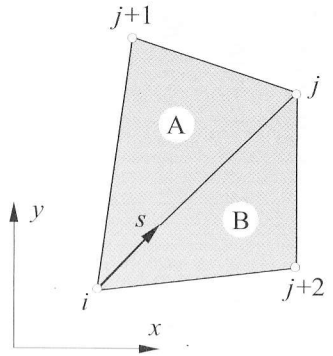
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{v} = \mathbf{S}\,\mathbf{v}\,, \tag{6.62}$$

gdje je matrica **S** jednaka

$$\mathbf{S} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} \beta_1 & \nu\gamma_1 & \beta_2 & \nu\gamma_2 & \beta_3 & \nu\gamma_3 \\ \nu\beta_1 & \gamma_1 & \nu\beta_2 & \gamma_2 & \nu\beta_3 & \gamma_3 \\ \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1 & \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2 & \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_3 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3 \end{bmatrix}, \tag{6.63}$$

što dokazuje konstantno polje naprezanja. Matrica **S** funkcija je elastičnih konstanti materijala i koordinata čvorova konačnog elementa. Za konstantno polje naprezanja zadovoljeni su uvjeti ravnoteže unutar elementa što, kao što je prethodno spomenuto, ne slijedi iz formulacije konačnog elementa. Naprezanja u susjednim elementima u općem slučaju su različita, što je razlog da uvjeti ravnoteže duž rubova susjednih elemenata u općem slučaju nisu ispunjeni. Nasuprot tome, zadovoljeni su uvjeti ravnoteže u čvorovima konačnih elemenata. Usitnjavanjem mreže konačnih elemenata smanjuju se razlike između naprezanja u susjednim elementima, pa su i manje greške poradi neispunjavanja uvjeta ravnoteže.

Za razliku od naprezanja, kontinuitet pomaka duž rubova ovdje prikazanih trokutnih elemenata je zadovoljen. Izvedene funkcije oblika pokazuju da je raspodjela pomaka duž rubova elemenata linearna, a moguće ju je jednoznačno odrediti s pomacima u pripadnim čvorovima. Ako su pomaci jednoznačne funkcije stupnjeva slobode u čvorovima, koji su za susjedne konačne elemente jednaki, uvjeti kompatibilnosti duž rubova u potpunosti su zadovoljeni.



Slika 6.7. Dva susjedna trokutna konačna elementa

Za dva susjedna elementa A i B prema slici 6.7. komponente naprezanja u općem slučaju su različite, pa duž zajedničkog ruba *i-j* nije moguće zadovoljiti uv-

jete ravnoteže. Nasuprot tome, kontinuitet pomaka je zadovoljen jer se može jednoznačno opisati s pomacima u čvorovima i i j. Raspodjela pomaka linearna je funkcija koordinate s duž prikazanog ruba. Na primjer, komponenta pomaka u jednaka je

$$u = a + bs\,, \tag{6.64}$$

gdje su a i b nepoznati parametri koji se mogu izračunati pomoću pomaka u čvorovima i i j. Na taj način linearnu funkciju moguće je jednoznačno odrediti, što je uvjet za zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti. Nelinearnu raspodjelu pomaka bilo bi nemoguće jednoznačno odrediti pomoću pripadna dva stupnja slobode.

6.3. Izračunavanje globalne matrice krutosti

Da bi se pomoću metode konačnih elemenata riješio odgovarajući problem, potrebno je izvesti jednadžbe ravnoteže za proračunski model koji se sastoji od više konačnih elemenata. Pritom su vanjske sile koje djeluju u čvorovima konačnih elemenata povezane sa stupnjevima slobode preko globalne matrice krutosti. Članovi globalne matrice krutosti sastoje se od članova matrica krutosti elemenata koje čine proračunski model. U čvorovima konačnih elemenata moraju biti zadovoljeni uvjeti ravnoteže i uvjeti kompatibilnosti. Vanjske sile koje djeluju u čvorovima proračunskog modela moraju biti u ravnoteži s unutarnjim silama koje se odnose na konačne elemente kojima je taj čvor zajednički. Unutarnje sile proračunskog modela su za odgovarajuće konačne elemente vanjske čvorne sile. Izjednačivanjem stupnjeva slobode u zajedničkim čvorovima zadovoljavaju se uvjeti kompatibilnosti. Stupnjevi slobode koji se odnose na pojedine elemente zamjenjuju se s globalnim stupnjevima slobode koji opisuju proračunski model, pri čemu je potrebno da se stupnjevi slobode pojedinih elemenata i stupnjevi slobode proračunskog modela odnose na isti koordinatni sustav.

Sile u čvorovima konačnog elementa jednake su umnošku pripadne matrice krutosti i vektora stupnjeva slobode

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{v}\,. \tag{6.65}$$

Ova je matrična relacija sustav linearnih algebarskih jednadžbi koje za proizvoljni konačni element s n stupnjeva slobode imaju oblik

$$
\begin{aligned}
F_1 &= k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \cdots + k_{1j}v_j + \cdots + k_{1n}v_n, \\
F_2 &= k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \cdots + k_{2j}v_j + \cdots + k_{2n}v_n, \\
&\vdots \\
F_i &= k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \cdots + k_{ij}v_j + \cdots + k_{in}v_n, \\
&\vdots \\
F_n &= k_{n1}v_1 + k_{n2}v_2 + \cdots + k_{nj}v_j + \cdots + k_{nn}v_n.
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

Stupnjevi slobode koji su u općem slučaju jednaki komponentama pomaka u pravcu odabranog lokalnoga koordinatnog sustava koji je vezan za element, zbog jednostavnosti, opisani su istim slovom s različitim indeksima od 1 do n. Analogno su prikazane i komponente čvornih sila. Svaki član matrice krutosti k_{ij} jednak je sili F_i koja nastaje poradi jediničnog pomaka v_j, uz uvjet da su svi ostali pomaci jednaki nuli. Prema Maxwell-Bettijevu teoremu [5] vrijedi da je $k_{ji} = k_{ij}$, što pokazuje simetričnost matrice krutosti.

Stupnjevi slobode proračunskog modela komponente su globalnog vektora pomaka u pravcu globalnoga koordinatnog sustava

$$
\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_j & \ldots & V_n \end{bmatrix}. \tag{6.67}
$$

Pripadne vanjske čvorne sile prikazuju se na analogan način

$$
\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_i & \ldots & Q_n \end{bmatrix}. \tag{6.68}
$$

Ako se u nekom proizvoljnom čvoru k spaja m elemenata, vanjska sila koja djeluje u tom čvoru $\mathbf{Q}_k$ mora biti u ravnoteži s unutarnjim silama $\mathbf{F}_k^{(e)}$ koje se odnose na pripadne elemente

$$
\mathbf{Q}_k + \sum_{e=1}^{m} \mathbf{F}_k^{(e)} = 0. \tag{6.69}
$$

Na taj način u spomenutom čvoru komponenta vanjske sile Q_i u pravcu proizvoljne globalne koordinatne osi mora biti jednaka sumi komponenata unutarnjih sila $F_i^{(e)}$ koje se odnose na istu koordinatnu os

$$
Q_i = \sum_{e=1}^{m} F_i^{(e)}. \tag{6.70}
$$

Za svaki konačni element, u skladu s izrazima (6.66), silu u čvoru moguće je prikazati pomoću stupnjeva slobode na sljedeći način:

$$F_i^{(e)} = \sum_j k_{ij}^{(e)} V_j^{(e)}. \tag{6.71}$$

Za razliku od relacija (6.66), tu se pretpostavlja da su stupnjevi slobode elemenata u pravcu globalnoga koordinatnog sustava, a njihovo indeksno označivanje jednako je brojevima koji odgovaraju sustavu numeriranja globalnih stupnjeva slobode. Uvrštavanjem (6.71) u (6.70) dobiva se

$$Q_i = \sum_{e=1}^{m} \sum_j k_{ij}^{(e)} V_j^{(e)} = \sum_{e=1}^{m} \left(k_{i1}^{(e)} V_1^{(e)} + \ldots + k_{ii}^{(e)} V_i^{(e)} + k_{ij}^{(e)} V_j^{(e)} + \ldots \right). \tag{6.72}$$

Uz uvjet kompatibilnosti pomaka $V_j^{(e)} = V_j$, relacija (6.72) može se transformirati u oblik koji odgovara globalnoj formulaciji

$$Q_i = K_{i1} V_1 + \ldots + K_{ii} V_i + K_{ij} V_j + \ldots, \tag{6.73}$$

gdje je

$$\begin{aligned} K_{i1} &= \sum_{e=1}^{m} k_{i1}^{(e)}, \\ K_{ii} &= \sum_{e=1}^{m} k_{ii}^{(e)}, \\ K_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} k_{ij}^{(e)}. \end{aligned} \tag{6.74}$$

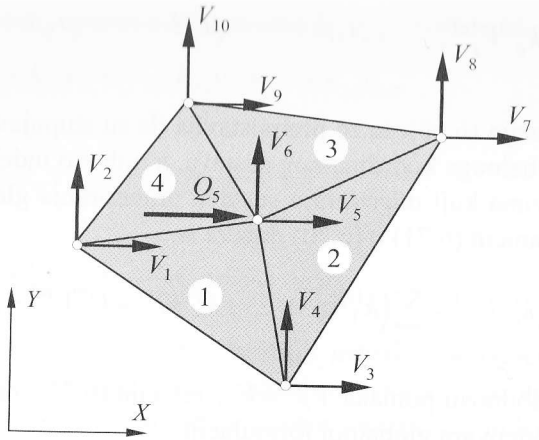
Veličine K_{i1}, K_{ii} i K_{ij} članovi su globalne matrice krutosti **K**. Ostali članovi određuju se na analogan način postavljanjem uvjeta ravnoteže u svim čvorovima za sve komponente sila u pravcu globalnoga koordinatnog sustava. Za čvorove u kojima ne djeluju vanjske sile, unutarnje sile koje se odnose na odgovarajuće elemente moraju biti međusobno uravnotežene.

Na opisani način izvodi se globalna jednadžba konačnih elemenata koja se odnosi na proračunski model

$$\mathbf{KV} = \mathbf{Q}. \tag{6.75}$$

Potrebno je napomenuti da ovdje nisu razmatrane sile u čvorovima koje su posljedica volumenskih sila i površinskog opterećenja te početnog naprezanja i početnih deformacija.

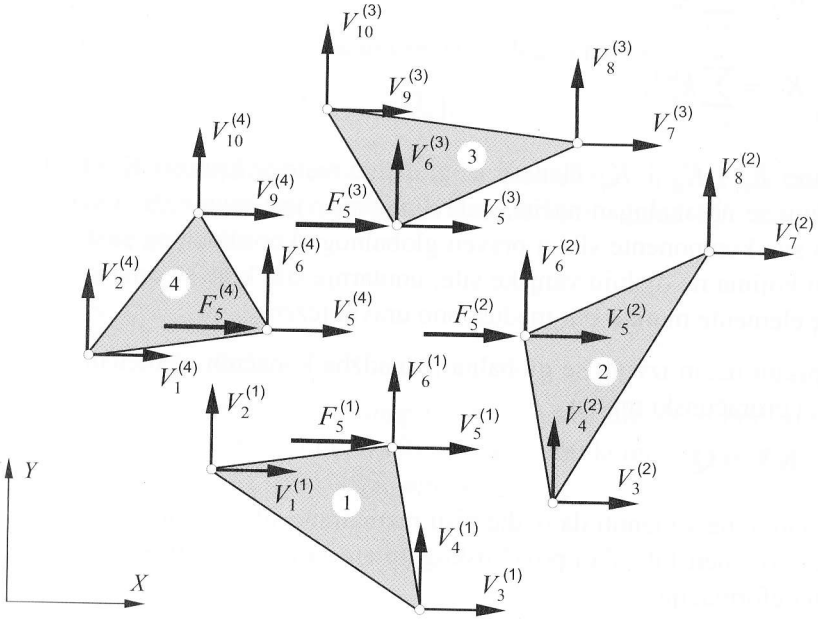
U cilju lakšeg razumijevanja opisanog postupka promatrat će se ravnoteža u čvoru u kojemu se spajaju četiri osnovna trokutna konačna elementa u globalnom koordinatnom sustavu X,Y, prema slici 6.8.



Slika 6.8. Osnovni trokutni elementi u globalnom koordinatnom sustavu

Na temelju relacije (6.70), za čvor u kojemu djeluje sila Q_5 vrijedi uvjet ravnoteže u pravcu globalne koordinatne osi X

$$Q_5 = \sum_{e=1}^{4} F_5^{(e)} = F_5^{(1)} + F_5^{(2)} + F_5^{(3)} + F_5^{(4)} . \tag{6.76}$$



Slika 6.9. Razdvojeni konačni elementi s pripadnim stupnjevima slobode i čvornom silom F_5

Sile koje se odnose na pojedine konačne elemente grafički su prikazane na slici 6.9., a izračunavaju se prema relaciji (6.71) na sljedeći način

$$F_5^{(1)} = k_{51}^{(1)}V_1^{(1)} + k_{52}^{(1)}V_2^{(1)} + k_{53}^{(1)}V_3^{(1)} + k_{54}^{(1)}V_4^{(1)} + k_{55}^{(1)}V_5^{(1)} + k_{56}^{(1)}V_6^{(1)},$$

$$F_5^{(2)} = k_{53}^{(2)}V_3^{(2)} + k_{54}^{(2)}V_4^{(2)} + k_{55}^{(2)}V_5^{(2)} + k_{56}^{(2)}V_6^{(2)} + k_{57}^{(2)}V_7^{(2)} + k_{58}^{(2)}V_8^{(2)},$$

$$F_5^{(3)} = k_{55}^{(3)}V_5^{(3)} + k_{56}^{(3)}V_6^{(3)} + k_{57}^{(3)}V_7^{(3)} + k_{58}^{(3)}V_8^{(3)} + k_{59}^{(3)}V_9^{(3)} + k_{510}^{(3)}V_{10}^{(3)}, \quad (6.77)$$

$$F_5^{(4)} = k_{51}^{(4)}V_1^{(4)} + k_{52}^{(4)}V_2^{(4)} + k_{55}^{(4)}V_5^{(4)} + k_{56}^{(4)}V_6^{(4)} + k_{59}^{(4)}V_9^{(4)} + k_{510}^{(4)}V_{10}^{(4)}.$$

Uvjeti kompatibilnosti za čvor u kojemu djeluje sila jednaki su

$$V_5^{(1)} = V_5^{(2)} = V_5^{(3)} = V_5^{(4)} = V_5,$$

$$V_6^{(1)} = V_6^{(2)} = V_6^{(3)} = V_6^{(4)} = V_6. \quad (6.78)$$

Analogno vrijedi za ostale čvorove. Uvrštavanjem (6.77) u (6.76), nakon izjednačivanja pomaka koji su zajednički za više elemenata, dobiva se

$$\begin{aligned} Q_5 = &\left(k_{51}^{(1)} + k_{51}^{(4)}\right)V_1 + \left(k_{52}^{(1)} + k_{52}^{(4)}\right)V_2 + \left(k_{53}^{(1)} + k_{53}^{(2)}\right)V_3 + \left(k_{54}^{(1)} + k_{54}^{(2)}\right)V_4 + \\ &+\left(k_{55}^{(1)} + k_{55}^{(2)} + k_{55}^{(3)} + k_{55}^{(4)}\right)V_5 + \left(k_{56}^{(1)} + k_{56}^{(2)} + k_{56}^{(3)} + k_{56}^{(4)}\right)V_6 + \\ &+\left(k_{57}^{(2)} + k_{57}^{(3)}\right)V_7 + \left(k_{58}^{(2)} + k_{58}^{(3)}\right)V_8 + \left(k_{59}^{(3)} + k_{59}^{(4)}\right)V_9 + \left(k_{510}^{(3)} + k_{510}^{(4)}\right)V_{10}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

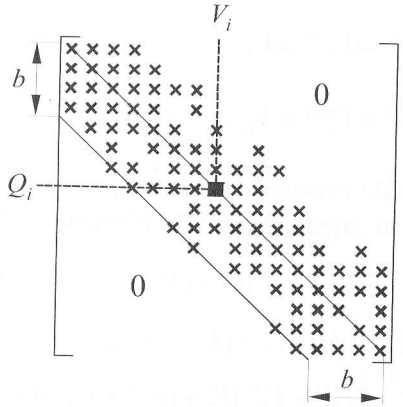
Relacija (6.79) globalna je relacija koja se odnosi na prikazani proračunski model, a može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} Q_5 = &K_{51}V_1 + K_{52}V_2 + K_{53}V_3 + K_{54}V_4 + K_{55}V_5 + K_{56}V_6 + \\ &+K_{57}V_7 + K_{58}V_8 + K_{59}V_9 + K_{510}V_{10}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

gdje su K_{51}, K_{52},..., K_{510} članovi globalne matrice krutosti. Potrebno je uočiti da se zbrajaju članovi s istim indeksima koji pripadaju različitim elementima. Drugi indeks označuje zajednički stupanj slobode, a prvi odgovara pridruženoj sili. Drugim riječima, zbrajaju se članovi matrice krutosti svih elemenata koji imaju zajedničke čvorove s pripadnim stupnjevima slobode. Kako bi se izračunala globalna matrica krutosti, potrebno je provesti zbrajanje u svim čvorovima i za sve stupnjeve slobode.

Globalna matrica krutosti simetrična je kvadratna matrica čiji je red jednak ukupnom broju stupnjeva slobode proračunskog modela. Na jednadžbe ravnoteže u čvorovima proračunskog modela imaju utjecaj samo oni konačni elementi s pripadnim stupnjevima slobode kojima je taj čvor zajednički. Iz toga slijedi da su u

odgovarajućem retku globalne matrice krutosti koji je pridružen vanjskoj komponenti sile Q_i, različiti od nule samo oni članovi koji odgovaraju stupnju slobode V_i i stupnjevima slobode susjednih elemenata kojima je V_i zajednički. Na taj način globalna matrica krutosti slabo je zaposjednuta matrica čiji su članovi različiti od nule smješteni na glavnoj dijagonali i u blizini glavne dijagonale, što odgovara strukturi pojasne matrice, slika 6.10. Na slici je prikazana pojasna matrica, a članovi različiti od nule označeni su križićima. Pola širine pojasa označeno je s b, te na taj način ukupna širina pojasa iznosi $2b-1$. Širina pojasa ovisi o načinu numeriranja čvorova i pripadnih stupnjeva slobode, a smanjuje se smanjivanjem razlike između brojeva kojima su označeni susjedni čvorovi, odnosno stupnjevi slobode.



Slika 6.10. Pojasna matrica

Manja širina pojasa zahtijeva manje memorije u računalu i kraće vrijeme računanja prilikom rješavanja sustava jednadžbi. To je razlog da je razvijeno više različitih algoritama pomoću kojih je moguće postići optimalno numeriranje stupnjeva slobode na taj način da se postigne minimalna širina pojasa globalne matrice krutosti. Osim ovdje opisanog postupka, globalnu matricu krutosti moguće je izračunati primjenom varijacijske formulacije koja će biti prikazana u 8. poglavlju.

7. FORMULACIJA KONAČNIH ELEMENATA POMOĆU METODE TEŽINSKOG REZIDUALA

Kao što je prikazano u 5. poglavlju, metoda težinskog reziduala primjenjuje se za približno rješavanje diferencijalne jednadžbe u odgovarajućem području koje je opisano prirodnim i geometrijskim rubnim uvjetima. Područje rješavanja moguće je ograničiti na prostor konačnog elementa gdje je zavisna varijabla prikazana pomoću interpolacijskih funkcija i stupnjeva slobode u čvorovima elementa. U skladu s metodom pomaka, diferencijalnu jednadžbu za područje konačnog elementa moguće je prikazati u obliku (5.1), zajedno s rubnim uvjetima opisanim relacijom (5.2). Pritom je nepoznata zavisna varijabla jednaka vektoru pomaka koji se aproksimira pomoću relacije

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{7.1}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika, a $\mathbf{v}$ je vektor stupnjeva slobode čiji su članovi u općem slučaju jednaki pomacima, a mogu biti jednaki i derivacijama pomaka u čvorovima konačnog elementa. Primjenom metoda težinskog reziduala problem se svodi na rješavanje sustava algebarskih jednadžbi gdje su nepoznanice parametri u čvorovima konačnog elementa. Najčešće se primjenjuje Galerkinova metoda pri čemu su težinske funkcije jednake funkcijama oblika. Na taj se način jednadžbe konačnog elementa izvode pomoću relacije koja je na temelju (5.5) i (5.6) jednaka

$$\int_V \mathbf{N}^T \left(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{q}\right) \mathrm{d}V = 0\,, \tag{7.2}$$

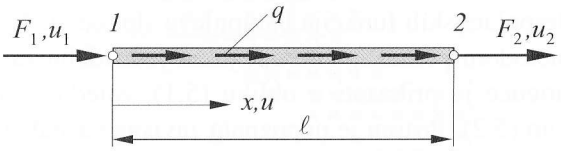
gdje je $\mathbf{A}$ diferencijalni operator koji je za rješavanje problema u mehanici deformabilnih tijela opisan relacijom (5.10), a $\mathbf{q}$ je vektor opterećenja. U svrhu smanjenja reda derivacije u podintegralnoj funkciji i uključivanja prirodnih rubnih uvjeta u formulaciju, provodi se parcijalna integracija koja je u trodimenzijskom prostoru opisana Gaussovom formulom. Geometrijski rubni uvjeti zamijenjeni su s uvjetima kompatibilnosti između susjednih elemenata. Funkcije oblika moraju biti odabrane na taj način da je duž rubova konačnog elementa za-

dovoljen kontinuitet pomaka i odgovarajućih derivacija pomaka, što je analogno prethodno opisanim geometrijskim rubnim uvjetima. Uvjeti kompatibilnosti potrebni su za formiranje globalne matrice krutosti te omogućuju monotono približavanje točnom rješenju s povećavanjem broja elemenata proračunskog modela.

Ovdje će se najprije prikazati izvođenje relacija za jednodimenzijski štapni konačni element koji je razmatran u prethodnom poglavlju, a nakon toga izvest će se opća jednadžba trodimenzijskoga konačnog elementa. Na kraju će se prikazati rješavanje problema uvijanja štapa neokruglog presjeka pomoću metode težinskog reziduala.

7.1. Osnovni štapni element

Potrebno je izvesti osnovne relacije za osno opterećeni štapni konačni element s dva stupnja slobode prema slici 7.1.



Slika 7.1. Osno opterećeni štapni konačni element

Pomoću relacija prikazanih u odjeljku 3.4.1., na način koji je opisan u odjeljku 3.1.6., izvodi se jednodimenzijska Poissonova diferencijalna jednadžba za rješavanje problema osno opterećenog štapa

$$AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q=0\,, \tag{7.3}$$

gdje je AE osna krutost štapa, u je pomak u pravcu osi x, a q je jednoliko kontinuirano osno opterećenje. Pretpostavlja se rješenje diferencijalne jednadžbe (7.3) za područje konačnog elementa prikazanog na slici 7.1. u obliku

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{7.4}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika čiji su članovi interpolacijske funkcije N_1 i N_2 prikazane u (6.20), a $\mathbf{v}$ je vektor stupnjeva slobode opisan relacijom (6.6). Rubni su uvjeti sila

$$\text{za } x=0\,, \qquad AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-F_1\,, \tag{7.5}$$

$$\text{za } x=\ell, \qquad AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F_2,$$

a pomaci u čvorovima *1* i *2* opisuju rubne uvjete pomaka.

U skladu s Galerkinovom metodom, težinska prosječna vrijednost ostatka prema (7.2) za područje konačnog elementa jednaka je

$$\int_0^{\ell} N_i\left(AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q\right)\mathrm{d}x=0, \qquad i=1,2. \tag{7.6}$$

Primjenom parcijalne integracije

$$\int_0^{\ell} N_i\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=N_i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \qquad i=1,2, \tag{7.7}$$

relacija (7.6) može se transformirati u oblik

$$AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\ell}N_iq\mathrm{d}x+N_iAE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^{\ell}, \qquad i=1,2. \tag{7.8}$$

Budući da za interpolacijske funkcije vrijedi $N_1(0)=N_2(\ell)=1$, a $N_1(\ell)=N_2(0)=0$, lako je zaključiti da drugi član na desnoj strani opisuje rubne uvjete sila (7.5). Osim toga, parcijalnom integracijom smanjio se red derivacije funkcije pomaka. Pomoću derivacije pomaka u (7.4) koja je jednaka

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathbf{v}, \tag{7.9}$$

te rubnih uvjeta (7.5), izraz (7.8) moguće je napisati u obliku

$$\left[AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\int_0^{\ell}N_1q\mathrm{d}x\\ \int_0^{\ell}N_2q\mathrm{d}x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

Ova relacija čini jednadžbu prikazanoga konačnog elementa. Izraz u uglatoj zagradi na lijevoj strani matrica je krutosti

$$\mathbf{k}=AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \tag{7.11}$$

a desna strana relacije jednaka je silama koje djeluju u čvorovima konačnog elementa

$$\mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} \int_0^\ell N_1 q \, dx \\ \int_0^\ell N_2 q \, dx \end{bmatrix} = \int_0^\ell \mathbf{N}^T q \, dx , \tag{7.12}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \tag{7.13}$$

pri čemu su komponente vektora $\mathbf{F}_V$ jednake silama koje su posljedica kontinuiranog osnog opterećenja. Sada se uz prikazane supstitucije jednadžba konačnog elementa može prikazati simbolički u obliku

$$\mathbf{k}\,\mathbf{v} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F} . \tag{7.14}$$

Korisno je izračunati članove matrice krutosti i usporediti ih s rješenjima dobivenim u prethodnom poglavlju primjenom direktnog postupka. Izraz (7.11) moguće je prikazati pomoću derivacija funkcija oblika

$$\mathbf{k} = AE \int_0^\ell \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx . \tag{7.15}$$

Nakon uvrštavanja izraza za funkcije oblika (6.20) i deriviranja, relacija (7.15) postaje

$$\mathbf{k} = AE \int_0^\ell \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} \\ \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} dx . \tag{7.16}$$

Izračunavanjem integrala dobiva se izraz za matricu krutosti

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

koji je jednak relaciji (6.32) koja je izvedena primjenom direktne formulacije.

7.2. Jednadžba trodimenzijskog elementa

Za područje proizvoljnog trodimenzijskoga konačnog elementa može se relacija (7.2), uz uvođenje supstitucije prema (5.10), napisati u obliku

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{D}_e \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u} \mathrm{d}V + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V = 0 . \tag{7.18}$$

Kao i u prethodnom odjeljku, u svrhu smanjenja reda derivacije pod integralom i uključivanja rubnih uvjeta sila (3.47) u formulaciju, potrebno je za prvi integral provesti parcijalnu integraciju. Pritom se koristi izraz (4.8) koji se nakon zamjene vektora pomaka $\mathbf{u}$ matricom funkcija oblika $\mathbf{N}$ transformira u relaciju

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}V = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{N} \mathrm{d}V . \tag{7.19}$$

Ako se naprezanje prikaže pomoću pomaka pri čemu je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}_k \mathbf{u} \\ \hline \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u} , \end{aligned} \tag{7.20}$$

izraz (7.19) prelazi u oblik

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{D}_e \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u} \mathrm{d}V = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S - \int_V (\mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u})^T \mathbf{D}_k \mathbf{N} \mathrm{d}V . \tag{7.21}$$

Pomoću (7.21), relacija (7.18) transformira se u sljedeću jednadžbu:

$$\int_V (\mathbf{D}_k \mathbf{N})^T \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{u} \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V - \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S = 0 . \tag{7.22}$$

Nakon što se pomak u elementu prikaže pomoću stupnjeva slobode u čvorovima prema (7.1), izraz (7.22) prelazi u jednadžbu konačnog elementa

$$\left[\int_V (\mathbf{D}_k \mathbf{N})^T \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{N} \mathrm{d}V \right] \mathbf{v} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V + \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S , \tag{7.23}$$

gdje je matrica krutosti jednaka

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{D}_k \mathbf{N})^T \mathbf{D} \mathbf{D}_k \mathbf{N} \mathrm{d}V . \tag{7.24}$$

Desna strana jednadžbe (7.23) jesu sile u čvorovima koje su posljedica vanjskog opterećenja. Uvođenjem supstitucije za derivacije matrice funkcija oblika prema (6.2), matrica krutosti se može napisati u obliku

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \mathrm{d}V \,. \tag{7.25}$$

Sile u čvorovima poradi vanjskih volumenskih sila opisane su vektorom

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V \,, \tag{7.26}$$

a sile koje su posljedica opterećenja koje djeluje po plohama elementa na površini S_q jednake su

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S \,. \tag{7.27}$$

Tako se jednadžba trodimenzijskog proizvoljnoga konačnog elementa može napisati u obliku

$$\mathbf{k}\,\mathbf{v} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S \,. \tag{7.28}$$

Ovdje nisu prikazane koncentrirane sile koje djeluju u čvorovima konačnog elementa, a koje su unutarnje sile u odnosu na proračunski model. Uz to, nije razmatran utjecaj početnih naprezanja i početnih deformacija. U sljedećem 8. poglavlju pokazat će se da je do istih relacija za matricu krutosti i za prikazane čvorne sile moguće doći primjenom varijacijske formulacije.

7.3. Uvijanje štapa neokruglog presjeka

7.3.1. Jednadžba konačnog elementa za rješavanje problema uvijanja

Ovdje će se pokazati primjena metode težinskog reziduala za rješavanje problema uvijanja štapa neokruglog presjeka. Taj problem je opisan dvodimenzijskom Poissonovom diferencijalnom jednadžbom prema [4] u obliku

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 = 0 \,, \tag{7.29}$$

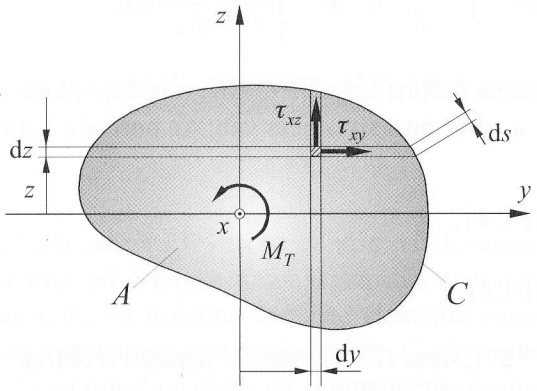
gdje je $\psi = \psi(y,z)$ torzijska funkcija naprezanja. Komponente naprezanja za presjek prema slici 7.2. jednake su

$$\tau_{xy} = G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial z}\ ,\quad \tau_{xz} = -G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial y}\ , \tag{7.30}$$

gdje je G smični modul, a ϑ je relativni kut uvijanja. Duž ruba C poprečnog presjeka vrijedi rubni uvjet $\psi = 0$. Izraz je za moment uvijanja

$$M_T = 2G\vartheta\int_A \psi \mathrm{d}A\,, \tag{7.31}$$

gdje je A površina poprečnog presjeka.



Slika 7.2. Presjek površine A u koordinatnom sustavu y, z

Ako se pretpostavi da je poprečni presjek jednak proizvoljnom dvodimenzijskom konačnom elementu, torzijska je funkcija naprezanja za područje konačnog elementa

$$\psi(y,z) = \sum_j N_j \hat{\psi}_j\ . \tag{7.32}$$

Tu je relaciju moguće zapisati u obliku

$$\psi(y,z) = \mathbf{N}\,\hat{\boldsymbol{\psi}}\ . \tag{7.33}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika, a $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ je vektor čiji su članovi funkcije naprezanja u čvorovima elementa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_j & \cdots & N_m \end{bmatrix}, \tag{7.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^T = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_j & \cdots & \psi_m \end{bmatrix}. \tag{7.35}$$

Uz primjenu Galerkinove metode analogno relaciji (7.6), izraz za težinsku prosječnu vrijednost ostatka je

$$\int_A N_i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \right) \mathrm{d}A = 0 , \qquad i = 1,2,\cdots,j,\cdots,m . \tag{7.36}$$

Pomoću parcijalne integracije prva dva člana u podintegralnoj funkciji mogu se transformirati prema relacijama

$$\int_A N_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \mathrm{d}A = \int_C N_i \frac{\partial \psi}{\partial y} a_{ny} \, \mathrm{d}s - \int_A \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \, \mathrm{d}A ,$$

$$\int_A N_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \mathrm{d}A = \int_C N_i \frac{\partial \psi}{\partial z} a_{nz} \, \mathrm{d}s - \int_A \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \, \mathrm{d}A , \tag{7.37}$$

gdje je ds elementarna duljina krivulje C koja omeđuje plohu poprečnog presjeka. Veličine a_{ny} i a_{nz} kosinusi su smjera vanjske normale n u odnosu na koordinatne osi y i z

$$a_{ny} = \cos \sphericalangle (n, y) ,$$

$$a_{nz} = \cos \sphericalangle (n, z) . \tag{7.38}$$

Pomoću relacija (7.37), izraz (7.36) može se napisati u obliku

$$\int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}A = \int_A 2 N_i \, \mathrm{d}A + \int_C N_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} a_{ny} + \frac{\partial \psi}{\partial z} a_{nz} \right) \mathrm{d}s , \tag{7.39}$$

$$i = 1,2,\cdots,j,\cdots,m .$$

Nakon uvrštavanja (7.33) te uvođenja matričnog zapisa za funkcije oblika N_i, relacija (7.39) postaje

$$\left[\int_A \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) \mathrm{d}A \right] \hat{\boldsymbol{\psi}} = 2 \int_A \mathbf{N}^T \mathrm{d}A + \int_C \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} a_{ny} + \frac{\partial \psi}{\partial z} a_{nz} \right) \mathrm{d}s , \tag{7.40}$$

što čini sustav od m linearnih algebarskih jednadžbi s m nepoznatih veličina u čvorovima elementa. Uvođenjem supstitucija

$$\mathbf{k} = \int_A \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) \mathrm{d}A , \tag{7.41}$$

$$\mathbf{F} = 2 \int_A \mathbf{N}^T \mathrm{d}A , \tag{7.42}$$

$$\mathbf{F}_C = \int_C \mathbf{N}^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} a_{ny} + \frac{\partial \psi}{\partial z} a_{nz} \right) \mathrm{d}s \,, \tag{7.43}$$

jednadžba (7.40) može se simbolički prikazati matričnom relacijom

$$\mathbf{k}\,\hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_C \,. \tag{7.44}$$

Nije teško zaključiti da relacija (7.43) opisuje rubne uvjete. U [4] je pokazano da je za pune poprečne presjeke torzijska funkcija naprezanja duž ruba jednaka nuli, tj.

$$\psi = 0 \quad \text{na} \quad C. \tag{7.45}$$

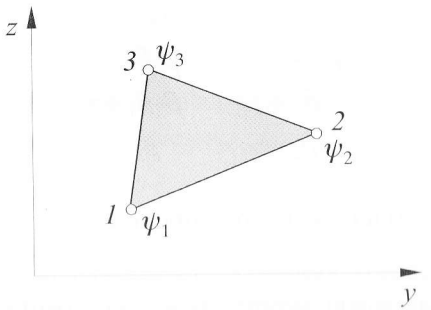
Kad je presjek podijeljen na više elemenata, globalna jednadžba proračunskog modela

$$\mathbf{K}\,\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{R} \tag{7.46}$$

određuje se zbrajanjem vektora $\mathbf{F}$ koji se odnose na elemente koji se spajaju u zajedničkim čvorovima, pri čemu se zbrajaju pripadni članovi matrica $\mathbf{k}$. Formiranje globalne jednadžbe za trokutne konačne elemente opisano je u primjeru 7.1. Nakon rješavanja globalnog sustava jednadžbi (7.46) i određivanja torzijske funkcije $\psi = \psi(y,z)$ za pojedine elemente, komponente posmičnih naprezanja i moment uvijanja izračunavaju se pomoću relacija (7.30) i (7.31).

7.3.2. Osnovni trokutni element za rješavanje problema uvijanja

Osnovni trokutni element za rješavanje problema uvijanja sastoji se od tri čvora kojima su pridružene vrijednosti torzijskih funkcija naprezanja. Element u ravnini y, z prikazan je na slici 7.3.



Slika 7.3. Osnovni trokutni element za rješavanje problema uvijanja

Vektor čvornih vrijednosti torzijske funkcije naprezanja jednak je

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^T = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix}. \tag{7.47}$$

Pripadne funkcije oblika izvode se pomoću linearne funkcije

$$\psi(y,z) = a_1 + a_2 y + a_3 z\,, \tag{7.48}$$

na način koji je analogan postupku opisanom u odjeljku 6.2. Za razliku od matrice funkcija oblika (6.48), ovdje su u matrici samo tri člana

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}. \tag{7.49}$$

Funkcije oblika N_1, N_2 i N_3, analogno relaciji (6.51), jednake su

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\alpha_i + y\beta_i + z\gamma_i\right)\ ,\ i = 1, 2, 3\,, \tag{7.50}$$

gdje se koeficijenti α_i, β_i i γ_i izračunavaju analogno izrazima (6.50)

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2\,, \quad \alpha_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3\,, \quad \alpha_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1\,, \\ &\beta_1 = z_2 - z_3\,, \quad \beta_2 = z_3 - z_1\,, \quad \beta_3 = z_1 - z_2\,, \\ &\gamma_1 = y_3 - y_2\,, \quad \gamma_2 = y_1 - y_3\,, \quad \gamma_3 = y_2 - y_1\,, \end{aligned} \tag{7.51}$$

Veličina A površina je trokuta, a izračunava se prema relaciji

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{7.52}$$

Uvrštavanjem (7.49) u (7.41), te nakon deriviranja i integriranja, dobiva se matrica $\mathbf{k}$ u obliku

$$\mathbf{k} = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 & \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 & \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 & \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{bmatrix}. \tag{7.53}$$

Nakon uvrštavanja (7.49) u (7.42) i provedbe integracije, određuje se veličina $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \frac{2}{3}A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.54}$$

Naprezanje u elementu izračunava se pomoću relacija (7.30) koje je prikladno napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = G\vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \psi \,. \tag{7.55}$$

Nakon uvrštavanja funkcije naprezanja $\psi = \mathbf{N}\hat{\boldsymbol{\psi}}$, gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika (7.49), izraz (7.55) postaje

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = G\vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial N_1}{\partial y} & -\dfrac{\partial N_2}{\partial y} & -\dfrac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}. \tag{7.56}$$

Deriviranjem interpolacijskih funkcija dobiva se sljedeći izraz za posmična naprezanja:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = G\vartheta \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}, \tag{7.57}$$

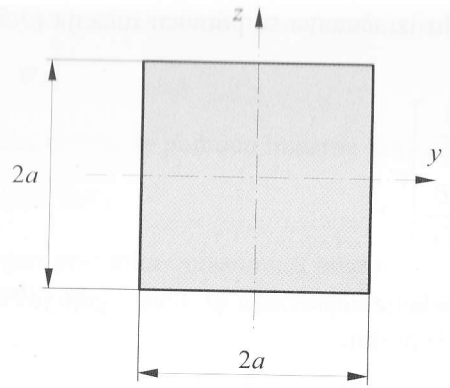
koji pokazuje da je raspodjela naprezanja po površini trokutnog elementa konstantna. Uvrštavanjem funkcije naprezanja u (7.31), nakon integriranja, izvodi se izraz za moment uvijanja na plohi trokutnog elementa

$$M_T = \frac{2}{3} GA\vartheta\left(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3\right). \tag{7.58}$$

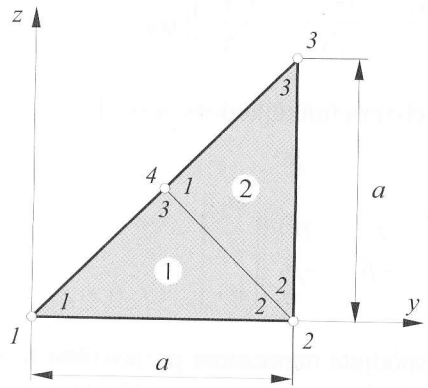
Nije teško zaključiti da je moment uvijanja proporcionalan zbroju torzijskih funkcija naprezanja u čvorovima elementa.

Primjer 7.1. Potrebno je odrediti raspodjelu posmičnih naprezanja i moment uvijanja za štap kvadratnog poprečnog presjeka prema slici P7.1.1. Zadan je modul smicanja G i relativni kut uvijanja ϑ.

Poradi simetrije, dovoljno je razmatrati 1/8 presjeka, koja će se zbog jednostavnosti podijeliti na samo dva trokutna konačna elementa, prema slici P7.1.2. Oba elementa imaju jednake površine $A = \dfrac{a^2}{4}$.



Slika P7.1.1. Kvadratni poprečni presjek



Slika P7.1.2. Proračunski model

Nakon uvrštavanja koordinata čvorova elemenata 1 i 2 u izraz (7.53), matrice $\mathbf{k}^{(1)}$ i $\mathbf{k}^{(2)}$ izračunavaju se u obliku

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad \text{(b)}$$

Pripadni vektori **F** prema relaciji (7.54) jednaki su

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}^{(2)} = \frac{a^2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(c)}$$

Za formiranje globalne jednadžbe konačnih elemenata (7.46), čvorovi proračunskog modela označeni su brojevima od 1 do 4, kao što je prikazano na slici P7.1.2., a njima su pridružene globalne vrijednosti funkcije naprezanja Ψ_1 do Ψ_4. Komponente globalnog vektora **R** za prikazani proračunski model izračunavaju se prema relacijama

$$R_1 = F_1^{(1)},$$

$$R_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)},$$

$$R_3 = F_3^{(2)}, \qquad \text{(d)}$$

$$R_4 = F_4^{(1)} + F_4^{(2)}.$$

Članovi vektora **F** za elemente 1 i 2 povezani su s funkcijama naprezanja Ψ_1 do Ψ_4, na temelju jednadžbe konačnog elementa, na sljedeći način:

$$F_1^{(1)} = k_{11}^{(1)}\Psi_1 + k_{12}^{(1)}\Psi_2 + k_{14}^{(1)}\Psi_4,$$

$$F_2^{(1)} = k_{21}^{(1)}\Psi_1 + k_{22}^{(1)}\Psi_2 + k_{24}^{(1)}\Psi_4, \qquad \text{(e)}$$

$$F_4^{(1)} = k_{41}^{(1)}\Psi_1 + k_{42}^{(1)}\Psi_2 + k_{44}^{(1)}\Psi_4,$$

$$F_2^{(2)} = k_{22}^{(2)}\Psi_2 + k_{23}^{(2)}\Psi_3 + k_{24}^{(2)}\Psi_4,$$

$$F_3^{(2)} = k_{32}^{(2)}\Psi_2 + k_{33}^{(2)}\Psi_3 + k_{34}^{(2)}\Psi_4, \qquad \text{(f)}$$

$$F_4^{(2)} = k_{42}^{(2)}\Psi_2 + k_{43}^{(2)}\Psi_3 + k_{44}^{(2)}\Psi_4.$$

Na temelju (d) izvodi se globalna jednadžba u obliku

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & k_{14}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & \left(k_{22}^{(1)}+k_{22}^{(2)}\right) & k_{23}^{(2)} & \left(k_{24}^{(1)}+k_{24}^{(2)}\right) \\ 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ k_{41}^{(1)} & \left(k_{42}^{(1)}+k_{42}^{(2)}\right) & k_{43}^{(2)} & \left(k_{44}^{(1)}+k_{44}^{(2)}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)}+F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(1)}+F_4^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{g}$$

Uvrštavanjem članova matrica (a) i (b) u relaciju (g), pri čemu je potrebno voditi računa koje komponente lokalnih veličina ψ_i $(i=1,2,3)$ odgovaraju globalnim veličinama Ψ_i $(i=1,2,3,4)$, dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{h}$$

Budući da je na temelju (7.45) za rub poprečnog presjeka $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$, uz izostavljanje pripadnih redaka i stupaca, dobiva se sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \frac{a^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{i}$$

čije je rješenje jednako

$$\Psi_1 = \frac{2}{3}a^2, \qquad \Psi_4 = \frac{a^2}{3}. \tag{j}$$

Povratkom na razinu elementa, funkcije naprezanja u čvorovima elemenata 1 i 2 jednake su

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a^2 \\ 0 \\ \frac{a^2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\psi}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{k}$$

Nakon uvrštavanja koordinata čvorova i funkcije naprezanja, pomoću relacije (7.57) izračunavaju se naprezanja za element 1

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{2G\vartheta}{a^2} \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & a \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a^2 \\ 0 \\ \frac{a^2}{3} \end{bmatrix}. \tag{l}$$

Nakon množenja, dobiva se

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy}^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} a G\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{m}$$

Analognim postupkom izračunavaju se naprezanja u elementu 2

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} a G\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{n}$$

Lako je uočiti da su za prikazani proračunski model dobivene jednake vrijednosti naprezanja u oba elementa. Budući da je iz teorije elastičnosti poznato da se obje komponente posmičnog naprezanja mijenjaju po presjeku, jednake vrijednosti naprezanja upućuju na grešku koju je moguće izbjeći povećanjem broja elemenata.

Na temelju relacije (7.58) izraz za moment uvijanja u elementu 1 jednak je

$$M_T^{(1)} = \frac{1}{6} G a^2 \vartheta \left(\psi_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} + \psi_3^{(1)} \right). \tag{o}$$

Nakon uvrštavanja funkcije naprezanja, izračunava se $M_T^{(1)} = \frac{1}{6} G\vartheta a^4$. Na isti način dobiva se $M_T^{(2)} = \frac{1}{18} G\vartheta a^4$ za element 2. Moment uvijanja za prikazani proračunski model određuje se zbrajanjem momenata za elemente 1 i 2

$$M_T^{(m)} = M_T^{(1)} + M_T^{(2)} = \frac{2}{9} G\vartheta a^4. \tag{p}$$

Budući da proračunski model čini $\frac{1}{8}$ kvadratnog presjeka, moment uvijanja za cijeli presjek jednak je

$$M_T = 8 M_T^{(m)} = \frac{16}{9} G\vartheta a^4 = 1{,}778 G\vartheta a^4. \tag{r}$$

Točno rješenje prema [4, 110] jednako je $M_T = 2,256 G\vartheta a^4$. Razlika između rješenja dobivenog pomoću metode konačnih elemenata i točnog rješenja upućuje na to da je potrebno povećati broj elemenata. U [23] je pokazano da je za proračunski model od četiri osnovna trokutna elementa moment uvijanja jednak $M_T = 1,9444 G\vartheta a^4$, što još uvijek ne daje potrebnu točnost. Osim povećanja broja ovdje opisanih elemenata, moguće je postići bolje približavanje točnom rješenju primjenom trokutnih elemenata višeg reda s višim stupnjem polinoma interpolacijske funkcije ili pomoću različitih četverokutnih elemenata [14, 23].

8. VARIJACIJSKA FORMULACIJA METODE KONAČNIH ELEMENATA

Jednadžba konačnog elementa za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela najčešće se izvodi pomoću varijacijskih principa. U okviru metode pomaka primjenjuje se princip virtualnih pomaka i princip minimuma potencijalne energije, koji su za elastične sustave opisani jednakim relacijama. Ovdje će se za područje proizvoljnoga trodimenzijskog elementa primijeniti princip minimuma potencijalne energije, što je ekvivalentno globalnoj Ritzovoj metodi. Za područje konačnog elementa pretpostavlja se funkcija pomaka, pri čemu su nepoznati parametri stupnjevi slobode u čvorovima, a izračunavaju se iz uvjeta stacionarnosti funkcionala. Kako bi se ostvarila globalna formulacija problema koji je opisan s više konačnih elemenata, geometrijski rubni uvjeti zamijenjeni su uvjetima kompatibilnosti između susjednih elemenata. Za C^{m-1}-varijacijski problem potrebno je zadovoljiti kontinuitet funkcije pomaka zajedno s njezinim derivacijama do $(m-1)$-og reda. Tako metoda konačnih elemenata u teorijskom smislu može se promatrati kao Rayleigh-Ritzova metoda.

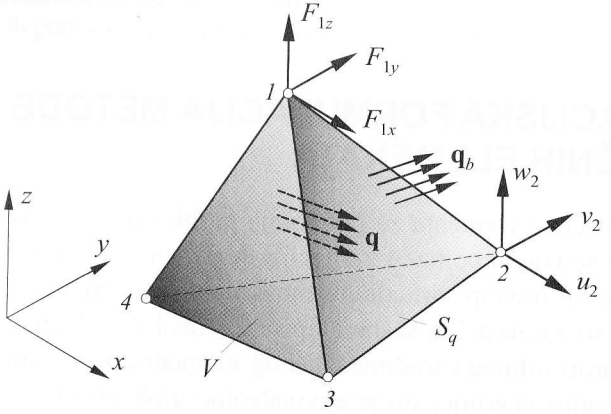
Ovdje će se prikazati izvođenje jednadžbe konačnog elementa za rješavanje trodimenzijskih problema. Za razliku od prethodnog izlaganja, gdje su razmatrani samo statički problemi, osim uvjeta statičke ravnoteže izvest će se i jednadžba dinamičke ravnoteže.

8.1. Jednadžba trodimenzijskog elementa

Radi jednostavnosti razmatrat će se ravnoteža osnovnog tetraedarskoga konačnog elementa prema slici 8.1. Element je po volumenu V opterećen silama koje su opisane vektorom $\mathbf{q}$. Na površini S_q djeluje opterećenje $\mathbf{q}_b$, a u čvorovima djeluju koncentrirane sile prikazane vektorom $\mathbf{F}$. Pretpostavlja se da u elementu vlada početno stanje deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Prema relacijama (4.14) i (4.15), ukupna potencijalna energija za prikazani element jednaka je

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}V - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V - \int_{S_q} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S - \mathbf{v}^T \mathbf{F}, \tag{8.1}$$

gdje posljednji član $\mathbf{v}^T\mathbf{F}$ opisuje potencijalnu energiju koncentriranih sila koje djeluju u čvorovima elementa.



Slika 8.1. Osnovni tetraedarski konačni element

Pomaci u čvorovima u pravcu koordinatnih osi stupnjevi su slobode elementa

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \cdots & u_4 & v_4 & w_4 \end{bmatrix}, \tag{8.2}$$

a pripadne komponente vektora koncentriranih sila jednake su

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} & \cdots & F_{4x} & F_{4y} & F_{4z} \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

Za proizvoljni trodimenzijski element s n čvorova vrijedi

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \cdots & u_n & v_n & w_n \end{bmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} & \cdots & F_{nx} & F_{ny} & F_{nz} \end{bmatrix}. \tag{8.5}$$

Sile prikazane u (8.3) i (8.5) vanjske su sile u odnosu na pojedine elemente, a u odnosu na globalni sustav konačnih elemenata unutarnje su veličine.

Element je u ravnoteži kad je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli

$$\delta\pi = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}V - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}V - \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V - \int_{S_q} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S - \delta\mathbf{v}^T \mathbf{F} = 0, \tag{8.6}$$

pri čemu pomaci u elementu moraju biti jednoznačne i kontinuirane funkcije koje zadovoljavaju kinematičke relacije

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,, \tag{8.7}$$

te rubni uvjet za opterećenu površinu S_q

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{u}\,. \tag{8.8}$$

Raspodjela pomaka u elementu opisana je pomoću funkcija oblika čiji je postupak izvođenja prikazan u 6. poglavlju

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,. \tag{8.9}$$

Uvrštavanjem (8.9) u (8.8) dobivaju se pomaci na rubu u ovisnosti o pomacima u čvorovima

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{N}\,\mathbf{v} = \mathbf{N}_S \mathbf{v}\,, \tag{8.10}$$

gdje je $\mathbf{N}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{N}$ matrica funkcija oblika za pomake na površini elementa. Raspodjela deformacije u elementu izračunava se pomoću relacija (8.7) i (8.9)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}\,\mathbf{v} = \mathbf{B}\,\mathbf{v}\,. \tag{8.11}$$

Nakon provedbe varijacije, relacije (8.9), (8.10) i (8.11) postaju

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\,\delta\mathbf{v}\,, \\ \delta\mathbf{u}_S &= \mathbf{N}_S\,\delta\mathbf{v}\,, \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\,\delta\mathbf{v}\,. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Uvrštavanjem (8.12) u (8.6) dobiva se diskretizirani princip minimuma potencijalne energije

$$\delta\mathbf{v}^T \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V \right] \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}^T \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d}V + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S + \mathbf{F} \right], \tag{8.13}$$

iz kojeg se izvodi jednadžba konačnog elementa

$$\mathbf{k}\,\mathbf{v} = \mathbf{F}_{\varepsilon_0} + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}\,, \tag{8.14}$$

gdje je matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V\,, \tag{8.15}$$

a sile u čvorovima opisuju desnu stranu jednadžbe. $\mathbf{F}_{\varepsilon_0}$ je vektor sila koje su posljedica početnih deformacija u elementu

$$\mathbf{F}_{\varepsilon_0} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}V \,, \tag{8.16}$$

$\mathbf{F}_V$ i $\mathbf{F}_S$ su čvorne sile poradi vanjskoga volumenskog i površinskog opterećenja

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V \,, \tag{8.17}$$

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S \,. \tag{8.18}$$

Lako je zaključiti da se izrazi (8.15), (8.17) i (8.18) potpuno podudaraju s relacijama koje su izvedene pomoću metode težinskog reziduala u prethodnom poglavlju. Za razliku od prethodnog poglavlja, ovdje je razmatran utjecaj početnih deformacija. Uz supstituciju

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}_{\varepsilon_0} + \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S + \mathbf{F} \,, \tag{8.19}$$

izraz (8.14) može se napisati u obliku

$$\mathbf{k}\,\mathbf{v} = \mathbf{r} \,. \tag{8.20}$$

Jednadžba konačnog elementa često se naziva jednadžba ravnoteže ili jednadžba krutosti konačnog elementa.

Ukupna potencijalna energija konačnog elementa sada se može prikazati pomoću matrice krutosti i čvornih sila

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{k}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{r} \,, \tag{8.21}$$

gdje je prvi član jednak energiji deformiranja, a drugi član čini energiju koja je posljedica vanjskog opterećenja.

Analognim postupkom moguće je izvesti jednadžbu konačnog elementa za rješavanje jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema. Pritom je integracija po volumenu zamijenjena s integriranjem po duljini, odnosno površini elementa. Na taj način matrica je krutosti za jednodimenzijske elemente jednaka

$$\mathbf{k} = \int_\ell \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathrm{d}s \,, \tag{8.22}$$

a za dvodimenzijske elemente vrijedi

$$\mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}A \,. \tag{8.23}$$

Matrica elastičnosti $\mathbf{D}$ i kinematičke relacije pomoću kojih se izračunava matrica $\mathbf{B}$ prikazane su u trećem poglavlju.

Ako je opterećenje funkcija vremena pri čemu se također pomaci mijenjaju ovisno o vremenu, potrebno je razmatrati dinamičku ravnotežu elementa. Pritom je potrebno uzeti u obzir utjecaj inercijskih sila i sila prigušenja. Obje sile raspodijeljene su po volumenu i djeluju suprotno od pravca gibanja. Inercijske sile jednake su umnošku gustoće elementa i vektora ubrzanja, $\rho \ddot{\mathbf{u}}$, a pretpostavlja se da su sile prigušenja proporcionalne brzini, $\kappa \dot{\mathbf{u}}$, gdje je κ konstanta prigušenja. Na temelju D'Alembertova principa, sada je vektor ukupnih volumenskih sila jednak

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \left(\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \kappa \dot{\mathbf{u}} \right) \mathrm{d}V \,. \tag{8.24}$$

Za proizvoljni trodimenzijski konačni element, čiji su stupnjevi slobode komponente pomaka u pravcu Kartezijeva koordinatnog sustava, polje pomaka opisano je relacijom

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y, z) \, \mathbf{v}(t) \,. \tag{8.25}$$

Uz pretpostavku da interpolacijske funkcije ostaju nepromijenjene, brzina i ubrzanje izračunavaju se deriviranjem relacije (8.25) po vremenu

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{v}} \,,$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{v}} \,. \tag{8.26}$$

Pomoću (8.26) vektor volumenskih sila može se napisati u obliku

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \left(\mathbf{q} - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{v}} - \kappa \mathbf{N} \dot{\mathbf{v}} \right) \mathrm{d}V \,. \tag{8.27}$$

Uvrštavanjem (8.27) u jednadžbu konačnog elementa (8.20) dobiva se uvjet dinamičke ravnoteže ili jednadžba gibanja konačnog elementa

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{r}(t) \,, \tag{8.28}$$

gdje je $\mathbf{m}$ matrica mase

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, \mathrm{d}V \,, \tag{8.29}$$

a $\mathbf{c}$ je matrica prigušenja konačnog elementa

$$\mathbf{c} = \int_V \kappa \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dV \,. \tag{8.30}$$

Isto kao i matrica krutosti, matrice **m** i **c** simetrične su i pune matrice. Za veličine ρ i κ različite od nule, **m** i **c** su pozitivno definitne matrice. Matrična relacija (8.28) je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi drugoga reda. Za njihovo rješavanje najčešće se primjenjuju metode modalne analize i izravne integracije [14, 59].

8.2. Globalna formulacija metode konačnih elemenata

8.2.1. Transformacija vektora stupnjeva slobode

U općem slučaju pravci stupnjeva slobode pojedinih elemenata, odnosno lokalnih stupnjeva slobode, ne poklapaju se s pravcima globalnoga koordinatnog sustava. Kako bi se mogla izvesti globalna jednadžba konačnih elemenata, potrebno je provesti transformaciju lokalnih stupnjeva slobode u pravcu globalnih koordinatnih osi. Za proizvoljan čvor i trodimenzijskoga konačnog elementa čiji su stupnjevi slobode komponente pomaka u_i, v_i i w_i u lokalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu (x, y, z), njihova veza sa stupnjevima slobode $\overline{u}_i$, $\overline{v}_i$ i $\overline{w}_i$ u pravcu globalnoga koordinatnog sustava (X, Y, Z) može se prikazati relacijom

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{w}_i \end{bmatrix}, \tag{8.31}$$

ili simbolički

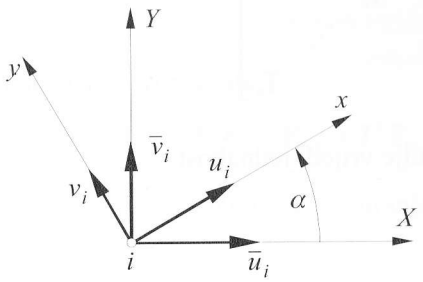
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{T}_i \, \overline{\mathbf{v}}_i \,, \tag{8.32}$$

gdje je $\mathbf{T}_i$ matrica transformacije, a njezini članovi su kosinusi smjera komponenata pomaka u lokalnom koordinatnom sustavu u odnosu na globalne koordinatne osi. Za proizvoljan čvor dvodimenzijskoga konačnog elementa transformacija stupnjeva slobode, analogno relaciji (8.31), jednaka je

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{bmatrix}. \tag{8.33}$$

Ako je kut između koordinatnih osi x i X jednak α, prema slici 8.2. vrijede jednakosti $\cos(x,Y)=\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$ i $\cos(y,X)=\cos(90+\alpha)=-\sin\alpha$, pa se izraz (8.33) može napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{bmatrix}. \tag{8.34}$$



Slika 8.2. Stupnjevi slobode u proizvoljnom čvoru konačnog elementa

Za stupnjeve slobode pravokutnoga konačnog elementa s četiri čvora, slika 8.3., vrijedi relacija

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{v}}_1 \\ \overline{\mathbf{v}}_2 \\ \overline{\mathbf{v}}_3 \\ \overline{\mathbf{v}}_4 \end{bmatrix}, \tag{8.35}$$

gdje je

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i^T = \begin{bmatrix} \overline{u}_i & \overline{v}_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ do } 4. \tag{8.36}$$

Relacija (8.35) simbolički se može prikazati kao

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\,\mathbf{v}_g, \tag{8.37}$$

gdje je $\mathbf{v}$ vektor pomaka u čvorovima elementa u pravcu lokalnih koordinatnih osi, $\mathbf{v}_g$ je vektor pomaka koji se odnosi na pravce globalnih koordinata, a $\mathbf{T}$ je matrica transformacije koja se sastoji od jednakih submatrica $\mathbf{T}_1 \ldots \mathbf{T}_4$. Na taj

način, ako konačnom elementu pripada n čvorova, njegova matrica transformacije sastoji se od n dijagonalno poredanih jednakih submatrica $\mathbf{T}_1 \ldots \mathbf{T}_n$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & & & \\ & \mathbf{T}_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \end{bmatrix}. \tag{8.38}$$

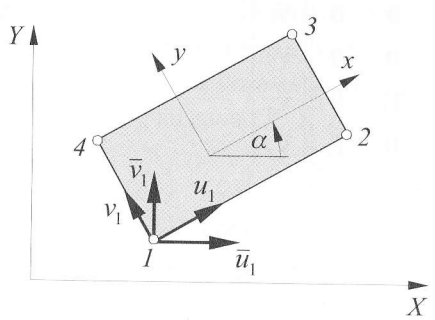
Za matricu transformacije vrijedi jednakost

$$\mathbf{T}\,\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \tag{8.39}$$

iz koje slijedi

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}, \tag{8.40}$$

što pokazuje da je $\mathbf{T}$ ortogonalna matrica.



Slika 8.3. Pravokutni element u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu

8.2.2. Transformacija vektora sila i matrice krutosti

Da bi se jednadžba konačnog elementa mogla prikazati u odnosu na globalni koordinatni sustav, osim transformacije stupnjeva slobode, potrebno je provesti transformaciju vektora sila i matrice krutosti. Vektor sila s komponentama u pravcu globalnoga koordinatnog sustava izračunava se iz uvjeta invarijantnosti mehaničkog rada

$$\mathbf{v}^T\mathbf{r} = \mathbf{v}_g^T\mathbf{r}_g, \tag{8.41}$$

gdje je $\mathbf{r}$ vektor sila u čvorovima konačnog elementa u lokalnom koordinatnom sustavu, a $\mathbf{r}_g$ opisuje sile s komponentama u pravcu globalnih koordinatnih osi. Nakon uvrštavanja (8.37), relacija (8.41) može se napisati u obliku

$$\mathbf{v}_g^T \mathbf{T}^T \mathbf{r} = \mathbf{v}_g^T \mathbf{r}_g \tag{8.42}$$

iz kojeg slijedi izraz za $\mathbf{r}_g$

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{r} . \tag{8.43}$$

Ista transformacija vrijedi za sve čvorne sile

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{F} \ , \ \mathbf{F}_{Sg} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_S \ , \ \mathbf{F}_{Vg} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_V \ , \ \mathbf{F}_{\varepsilon_0 g} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_{\varepsilon_0} . \tag{8.44}$$

Na temelju invarijantnosti energije elastičnog deformiranja vrijedi jednakost

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{k} \ \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_g^T \mathbf{k}_g \mathbf{v}_g . \tag{8.45}$$

Uvrštavanjem (8.37) u lijevu stranu jednadžbe (8.45) dobiva se

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{k} \ \mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{T} \mathbf{v}_g \right)^T \mathbf{k} \ \mathbf{T} \mathbf{v}_g = \frac{1}{2} \mathbf{v}_g^T \ \mathbf{T}^T \ \mathbf{k} \ \mathbf{T} \mathbf{v}_g , \tag{8.46}$$

iz čega, nakon usporedbe s desnom stranom, slijedi izraz za matricu krutosti u odnosu na globalni koordinatni sustav

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \ \mathbf{T} . \tag{8.47}$$

Sada se jednadžba konačnog elementa može napisati u obliku

$$\mathbf{k}_g \mathbf{v}_g = \mathbf{r}_g . \tag{8.48}$$

8.2.3. Metoda direktne superpozicije

Jedna od metoda koja se danas najčešće primjenjuje za izvođenje globalne jednadžbe konačnih elemenata je metoda direktne superpozicije koja se u literaturi često naziva direktna metoda krutosti (Direct Stiffness Method). Uz pretpostavku da se stupnjevi slobode elementa podudaraju s globalnim stupnjevima slobode, odnosno da je provedena transformacija stupnjeva slobode, ukupna potencijalna energija konačnog elementa jednaka je

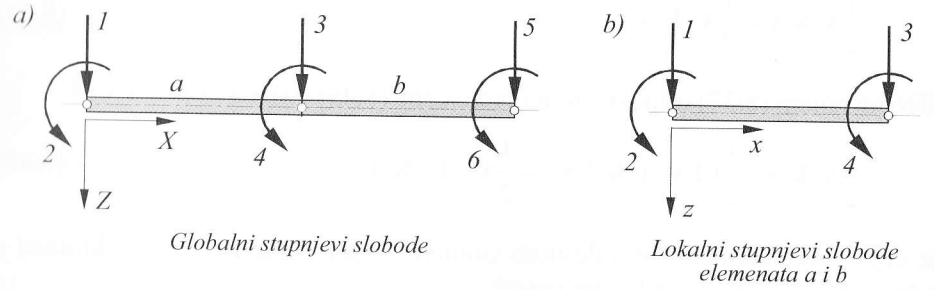
$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}_g^T \mathbf{k}_g \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_g^T \mathbf{F}_{Vg} - \mathbf{v}_g^T \mathbf{F}_{Sg} - \mathbf{v}_g^T \mathbf{F}_g . \tag{8.49}$$

Ovdje je, poradi jednostavnosti, izostavljen vektor sila zbog početnih deformacija. Stupnjeve slobode elementa $\mathbf{v}_g$ potrebno je izraziti preko globalnih stupnjeva slobode proračunskog modela $\mathbf{V}$. To se postiže pomoću kinematičke matrice transformacije $\mathbf{a}_g$, koja u slučaju kad se pravci lokalnih i globalnih stupnjeva slobode poklapaju, sadrži članove nula i jedan.

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{a}_g \mathbf{V} . \tag{8.50}$$

Budući da se u toj relaciji provodi izjednačivanje lokalnih i globalnih stupnjeva slobode, kinematička matrica transformacije naziva se još i matrica izjednačivanja ili identifikacije.

Zbog lakšeg razumijevanja, izjednačivanje lokalnih i globalnih stupnjeva slobode provest će se na sljedećem jednostavnom primjeru od dva gredna elementa, slika 8.4.



Globalni stupnjevi slobode

Lokalni stupnjevi slobode elemenata a i b

Slika 8.4. Globalni i lokalni stupnjevi slobode

Globalni stupnjevi slobode označeni su brojevima od 1 do 6

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{bmatrix}.$$

Analogno su označeni lokalni stupnjevi slobode grednih elemenata *a* i *b*

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}.$$

Njihova međusobna veza prikazana je pomoću kinematičkih matrica transformacije $\mathbf{a}_g^a$ i $\mathbf{a}_g^b$

$$\mathbf{v}_g^a = \mathbf{a}_g^a \mathbf{V} : \quad \begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \\ v_3^a \\ v_4^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix},$$

jete ravnoteže. Nasuprot tome, kontinuitet pomaka je zadovoljen jer se može jednoznačno opisati s pomacima u čvorovima i i j. Raspodjela pomaka linearna je funkcija koordinate s duž prikazanog ruba. Na primjer, komponenta pomaka u jednaka je

$$u = a + bs\,, \tag{6.64}$$

gdje su a i b nepoznati parametri koji se mogu izračunati pomoću pomaka u čvorovima i i j. Na taj način linearnu funkciju moguće je jednoznačno odrediti, što je uvjet za zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti. Nelinearnu raspodjelu pomaka bilo bi nemoguće jednoznačno odrediti pomoću pripadna dva stupnja slobode.

6.3. Izračunavanje globalne matrice krutosti

Da bi se pomoću metode konačnih elemenata riješio odgovarajući problem, potrebno je izvesti jednadžbe ravnoteže za proračunski model koji se sastoji od više konačnih elemenata. Pritom su vanjske sile koje djeluju u čvorovima konačnih elemenata povezane sa stupnjevima slobode preko globalne matrice krutosti. Članovi globalne matrice krutosti sastoje se od članova matrica krutosti elemenata koje čine proračunski model. U čvorovima konačnih elemenata moraju biti zadovoljeni uvjeti ravnoteže i uvjeti kompatibilnosti. Vanjske sile koje djeluju u čvorovima proračunskog modela moraju biti u ravnoteži s unutarnjim silama koje se odnose na konačne elemente kojima je taj čvor zajednički. Unutarnje sile proračunskog modela su za odgovarajuće konačne elemente vanjske čvorne sile. Izjednačivanjem stupnjeva slobode u zajedničkim čvorovima zadovoljavaju se uvjeti kompatibilnosti. Stupnjevi slobode koji se odnose na pojedine elemente zamjenjuju se s globalnim stupnjevima slobode koji opisuju proračunski model, pri čemu je potrebno da se stupnjevi slobode pojedinih elemenata i stupnjevi slobode proračunskog modela odnose na isti koordinatni sustav.

Sile u čvorovima konačnog elementa jednake su umnošku pripadne matrice krutosti i vektora stupnjeva slobode

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{v}\,. \tag{6.65}$$

Ova je matrična relacija sustav linearnih algebarskih jednadžbi koje za proizvoljni konačni element s n stupnjeva slobode imaju oblik

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{K}\,\mathbf{V} - \mathbf{V}^T(\mathbf{R}_V + \mathbf{R}_S + \mathbf{Q}), \tag{8.55}$$

gdje je $\mathbf{K}$ globalna ili ukupna matrica krutosti, a jednaka je sumi matrica krutosti pojedinih elemenata koje se odnose na globalne stupnjeve slobode

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n} \mathbf{K}^e . \tag{8.56}$$

$\mathbf{R}_V$ i $\mathbf{R}_S$ su globalni vektori volumenskih i površinskih sila

$$\mathbf{R}_V = \sum_{e=1}^{n} \mathbf{F}_V^e \ , \quad \mathbf{R}_S = \sum_{e=1}^{n} \mathbf{F}_S^e \ . \tag{8.57}$$

Iz uvjeta stacionarnosti ukupne potencijalne energije $\delta\Pi = 0$ izvodi se globalna jednadžba konačnih elemenata

$$\mathbf{K}\,\mathbf{V} = \mathbf{R}\,, \tag{8.58}$$

gdje je

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_V + \mathbf{R}_S + \mathbf{Q}\,. \tag{8.59}$$

Formiranje globalne matrice krutosti danas se u računalu najčešće provodi tzv. postupkom popunjavanja, pri čemu se kinematička matrica transformacije zamjenjuje tablicom iz koje je vidljivo koji lokalni stupnjevi slobode odgovaraju globalnim stupnjevima slobode. Počinje se s nul-matricom čiji je red jednak redu ukupne ili globalne matrice krutosti, da bi nakon toga, na temelju tablice iz koje se vidi podudaranje lokalnih i globalnih stupnjeva slobode, počeo proces popunjavanja članovima matrica krutosti pojedinih elemenata. Postupak se provodi na sljedeći način [71]:

Ako globalnim stupnjevima slobode V_i i V_ℓ odgovaraju lokalni stupnjevi slobode pojedinih elemenata v_j^1, v_k^2,... i v_m^1, v_n^2,..., članovi globalne matrice krutosti izračunavaju se superpozicijom

$$K_{i\ell} = k_{jm}^1 + k_{kn}^2 + \ldots\ldots \forall\, i, \ell\,. \tag{8.60}$$

Na taj način, ako globalnom pomaku V_3 odgovaraju stupnjevi slobode v_3^1 i v_1^2 elemenata 1 i 2, a v_4^1 i v_2^2 odgovaraju pomaku V_4, članovi ukupne matrice krutosti K_{33}, K_{34} i K_{44} jednaki su

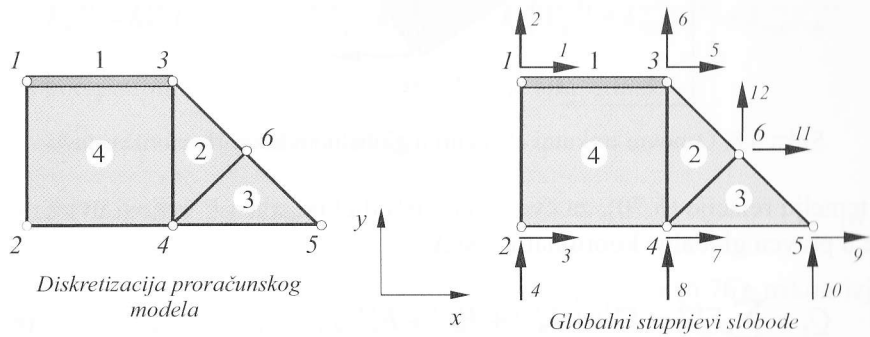
$$K_{33} = k_{33}^1 + k_{11}^2\,,$$

$$K_{34} = k_{34}^1 + k_{12}^2\,,$$

$K_{44} = k^1_{44} + k^2_{22}$.

Zbog boljeg razumijevanja metode direktne superpozicije, u sljedećem primjeru prikazat će se postupak stvaranja globalne matrice krutosti za jednostavni proračunski model od četiri konačna elementa.

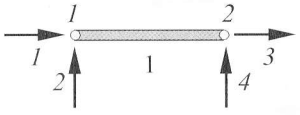
Primjer 8.1. Za proračunski model s označenim globalnim stupnjevima slobode prikazan na slici P8.1.1. potrebno je primjenom metode direktne superpozicije formirati globalnu matricu krutosti.



Slika P8.1.1. Proračunski model s globalnim stupnjevima slobode

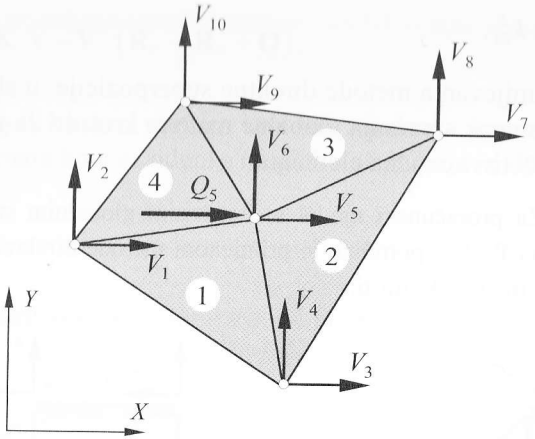
Proračunski model sastoji se od jednoga štapnog, dva trokutna te jednoga pravokutnog elementa, koji su označeni brojevima od 1 do 4. Svi elementi pojedinačno su prikazani s označenim stupnjevima slobode i pripadnim matricama krutosti, pri čemu se pretpostavlja da su stupnjevi slobode pojedinih elemenata u pravcu globalnih koordinatnih osi. Članovi matrica krutosti označeni su općim brojevima. Na temelju tablice iz koje se vidi koji lokalni stupnjevi slobode odgovaraju globalnim stupnjevima slobode, određuju se matrice krutosti pojedinih elemenata $\mathbf{K}^e$ čiji je red jednak broju članova globalnoga vektora pomaka. Globalna matrica krutosti $\mathbf{K}$ prikazanog proračunskog modela izračunava se zbrajanjem matrica krutosti pojedinih elemenata, $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{4} \mathbf{K}^e$.

Elementi s označenim stupnjevima slobode i pripadnim matricama krutosti:



Štapni element

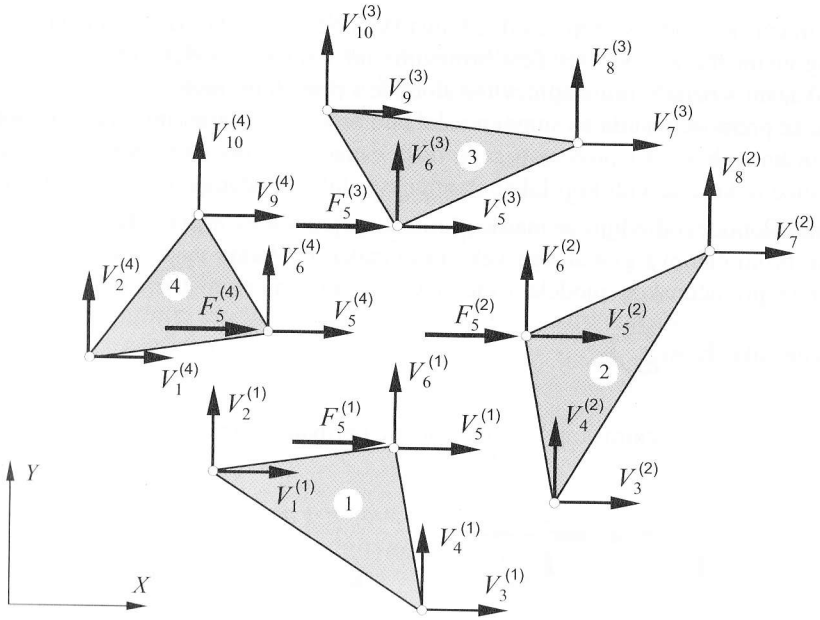
$$\mathbf{k}_g = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$



Slika 6.8. Osnovni trokutni elementi u globalnom koordinatnom sustavu

Na temelju relacije (6.70), za čvor u kojemu djeluje sila Q_5 vrijedi uvjet ravnoteže u pravcu globalne koordinatne osi X

$$Q_5 = \sum_{e=1}^{4} F_5^{(e)} = F_5^{(1)} + F_5^{(2)} + F_5^{(3)} + F_5^{(4)} . \tag{6.76}$$



Slika 6.9. Razdvojeni konačni elementi s pripadnim stupnjevima slobode i čvornom silom F_5

Sile koje se odnose na pojedine konačne elemente grafički su prikazane na slici 6.9., a izračunavaju se prema relaciji (6.71) na sljedeći način

$$F_5^{(1)} = k_{51}^{(1)}V_1^{(1)} + k_{52}^{(1)}V_2^{(1)} + k_{53}^{(1)}V_3^{(1)} + k_{54}^{(1)}V_4^{(1)} + k_{55}^{(1)}V_5^{(1)} + k_{56}^{(1)}V_6^{(1)},$$

$$F_5^{(2)} = k_{53}^{(2)}V_3^{(2)} + k_{54}^{(2)}V_4^{(2)} + k_{55}^{(2)}V_5^{(2)} + k_{56}^{(2)}V_6^{(2)} + k_{57}^{(2)}V_7^{(2)} + k_{58}^{(2)}V_8^{(2)},$$

$$F_5^{(3)} = k_{55}^{(3)}V_5^{(3)} + k_{56}^{(3)}V_6^{(3)} + k_{57}^{(3)}V_7^{(3)} + k_{58}^{(3)}V_8^{(3)} + k_{59}^{(3)}V_9^{(3)} + k_{510}^{(3)}V_{10}^{(3)}, \quad (6.77)$$

$$F_5^{(4)} = k_{51}^{(4)}V_1^{(4)} + k_{52}^{(4)}V_2^{(4)} + k_{55}^{(4)}V_5^{(4)} + k_{56}^{(4)}V_6^{(4)} + k_{59}^{(4)}V_9^{(4)} + k_{510}^{(4)}V_{10}^{(4)}.$$

Uvjeti kompatibilnosti za čvor u kojemu djeluje sila jednaki su

$$V_5^{(1)} = V_5^{(2)} = V_5^{(3)} = V_5^{(4)} = V_5,$$

$$V_6^{(1)} = V_6^{(2)} = V_6^{(3)} = V_6^{(4)} = V_6. \quad (6.78)$$

Analogno vrijedi za ostale čvorove. Uvrštavanjem (6.77) u (6.76), nakon izjednačivanja pomaka koji su zajednički za više elemenata, dobiva se

$$\begin{aligned} Q_5 = &\left(k_{51}^{(1)} + k_{51}^{(4)}\right)V_1 + \left(k_{52}^{(1)} + k_{52}^{(4)}\right)V_2 + \left(k_{53}^{(1)} + k_{53}^{(2)}\right)V_3 + \left(k_{54}^{(1)} + k_{54}^{(2)}\right)V_4 + \\ &+\left(k_{55}^{(1)} + k_{55}^{(2)} + k_{55}^{(3)} + k_{55}^{(4)}\right)V_5 + \left(k_{56}^{(1)} + k_{56}^{(2)} + k_{56}^{(3)} + k_{56}^{(4)}\right)V_6 + \\ &+\left(k_{57}^{(2)} + k_{57}^{(3)}\right)V_7 + \left(k_{58}^{(2)} + k_{58}^{(3)}\right)V_8 + \left(k_{59}^{(3)} + k_{59}^{(4)}\right)V_9 + \left(k_{510}^{(3)} + k_{510}^{(4)}\right)V_{10}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Relacija (6.79) globalna je relacija koja se odnosi na prikazani proračunski model, a može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} Q_5 = &K_{51}V_1 + K_{52}V_2 + K_{53}V_3 + K_{54}V_4 + K_{55}V_5 + K_{56}V_6 + \\ &+K_{57}V_7 + K_{58}V_8 + K_{59}V_9 + K_{510}V_{10}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

gdje su K_{51}, K_{52},..., K_{510} članovi globalne matrice krutosti. Potrebno je uočiti da se zbrajaju članovi s istim indeksima koji pripadaju različitim elementima. Drugi indeks označuje zajednički stupanj slobode, a prvi odgovara pridruženoj sili. Drugim riječima, zbrajaju se članovi matrice krutosti svih elemenata koji imaju zajedničke čvorove s pripadnim stupnjevima slobode. Kako bi se izračunala globalna matrica krutosti, potrebno je provesti zbrajanje u svim čvorovima i za sve stupnjeve slobode.

Globalna matrica krutosti simetrična je kvadratna matrica čiji je red jednak ukupnom broju stupnjeva slobode proračunskog modela. Na jednadžbe ravnoteže u čvorovima proračunskog modela imaju utjecaj samo oni konačni elementi s pripadnim stupnjevima slobode kojima je taj čvor zajednički. Iz toga slijedi da su u

$$\mathbf{K}^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & & & & & & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & & & & & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & & & & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & & & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & & c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

$$\mathbf{K}^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} d_{77} & d_{78} & d_{71} & d_{72} & d_{75} & d_{76} & d_{73} & d_{74} & & & & \\ d_{87} & d_{88} & d_{81} & d_{82} & d_{85} & d_{86} & d_{83} & d_{84} & & & & \\ d_{17} & d_{18} & d_{11} & d_{12} & d_{15} & d_{16} & d_{13} & d_{14} & & & & \\ d_{27} & d_{28} & d_{21} & d_{22} & d_{25} & d_{26} & d_{23} & d_{24} & & & & \\ d_{57} & d_{58} & d_{51} & d_{52} & d_{55} & d_{56} & d_{53} & d_{54} & & & & \\ d_{67} & d_{68} & d_{61} & d_{62} & d_{65} & d_{66} & d_{63} & d_{64} & & & & \\ d_{37} & d_{38} & d_{31} & d_{32} & d_{35} & d_{36} & d_{33} & d_{34} & & & & \\ d_{47} & d_{48} & d_{41} & d_{42} & d_{45} & d_{46} & d_{43} & d_{44} & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

Globalna matrica krutosti proračunskog modela:

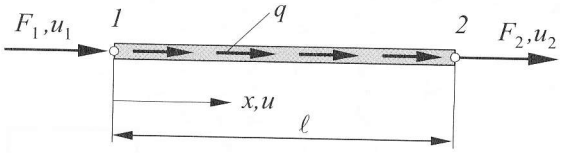
$$\mathbf{K} = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 1 & a_{11}+d_{77} & a_{12}+d_{78} & d_{71} & d_{72} & a_{13}+d_{75} & a_{14}+d_{76} & d_{73} & d_{74} & & & & \\ 2 & a_{21}+d_{87} & a_{22}+d_{88} & d_{81} & d_{82} & a_{23}+d_{85} & a_{24}+d_{86} & d_{83} & d_{84} & & & & \\ 3 & d_{17} & d_{18} & d_{11} & d_{12} & d_{15} & d_{16} & d_{13} & d_{14} & & & & \\ 4 & d_{27} & d_{28} & d_{21} & d_{22} & d_{25} & d_{26} & d_{23} & d_{24} & & & & \\ 5 & a_{31}+d_{57} & a_{32}+d_{58} & d_{51} & d_{52} & a_{33}+b_{11}+d_{55} & a_{34}+b_{12}+d_{56} & b_{13}+d_{53} & b_{14}+d_{54} & & & b_{15} & b_{16} \\ 6 & a_{41}+d_{67} & a_{42}+d_{68} & d_{61} & d_{62} & a_{43}+b_{21}+d_{65} & a_{44}+b_{22}+d_{66} & b_{23}+d_{63} & b_{24}+d_{64} & & & b_{25} & b_{26} \\ 7 & d_{37} & d_{38} & d_{31} & d_{32} & b_{31}+d_{35} & b_{32}+d_{36} & b_{33}+c_{11}+d_{33} & b_{34}+c_{12}+d_{34} & c_{13} & c_{14} & b_{35}+c_{15} & b_{36}+c_{16} \\ 8 & d_{47} & d_{48} & d_{41} & d_{42} & b_{41}+d_{45} & b_{42}+d_{46} & b_{43}+c_{21}+d_{43} & b_{44}+c_{22}+d_{44} & c_{23} & c_{24} & b_{45}+c_{25} & b_{46}+c_{26} \\ 9 & & & & & & & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ 10 & & & & & & & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 11 & & & & & b_{51} & b_{52} & b_{53}+c_{51} & b_{54}+c_{52} & c_{53} & c_{54} & b_{55}+c_{55} & b_{56}+c_{56} \\ 12 & & & & & b_{61} & b_{62} & b_{63}+c_{61} & b_{64}+c_{62} & c_{63} & c_{64} & b_{65}+c_{65} & b_{66}+c_{66} \end{array}$$

dovoljen kontinuitet pomaka i odgovarajućih derivacija pomaka, što je analogno prethodno opisanim geometrijskim rubnim uvjetima. Uvjeti kompatibilnosti potrebni su za formiranje globalne matrice krutosti te omogućuju monotono približavanje točnom rješenju s povećavanjem broja elemenata proračunskog modela.

Ovdje će se najprije prikazati izvođenje relacija za jednodimenzijski štapni konačni element koji je razmatran u prethodnom poglavlju, a nakon toga izvest će se opća jednadžba trodimenzijskoga konačnog elementa. Na kraju će se prikazati rješavanje problema uvijanja štapa neokruglog presjeka pomoću metode težinskog reziduala.

7.1. Osnovni štapni element

Potrebno je izvesti osnovne relacije za osno opterećeni štapni konačni element s dva stupnja slobode prema slici 7.1.



Slika 7.1. Osno opterećeni štapni konačni element

Pomoću relacija prikazanih u odjeljku 3.4.1., na način koji je opisan u odjeljku 3.1.6., izvodi se jednodimenzijska Poissonova diferencijalna jednadžba za rješavanje problema osno opterećenog štapa

$$AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q=0, \tag{7.3}$$

gdje je AE osna krutost štapa, u je pomak u pravcu osi x, a q je jednoliko kontinuirano osno opterećenje. Pretpostavlja se rješenje diferencijalne jednadžbe (7.3) za područje konačnog elementa prikazanog na slici 7.1. u obliku

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{v}, \tag{7.4}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika čiji su članovi interpolacijske funkcije N_1 i N_2 prikazane u (6.20), a $\mathbf{v}$ je vektor stupnjeva slobode opisan relacijom (6.6). Rubni su uvjeti sila

$$\text{za } x=0, \qquad AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-F_1, \tag{7.5}$$

$$\text{za } x=\ell, \qquad AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F_2,$$

a pomaci u čvorovima *1* i *2* opisuju rubne uvjete pomaka.

U skladu s Galerkinovom metodom, težinska prosječna vrijednost ostatka prema (7.2) za područje konačnog elementa jednaka je

$$\int_0^{\ell} N_i\left(AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q\right)\mathrm{d}x=0, \qquad i=1,2. \tag{7.6}$$

Primjenom parcijalne integracije

$$\int_0^{\ell} N_i\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=N_i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \qquad i=1,2, \tag{7.7}$$

relacija (7.6) može se transformirati u oblik

$$AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\ell}N_iq\mathrm{d}x+N_i\,AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^{\ell}, \qquad i=1,2. \tag{7.8}$$

Budući da za interpolacijske funkcije vrijedi $N_1(0)=N_2(\ell)=1$, a $N_1(\ell)=N_2(0)=0$, lako je zaključiti da drugi član na desnoj strani opisuje rubne uvjete sila (7.5). Osim toga, parcijalnom integracijom smanjio se red derivacije funkcije pomaka. Pomoću derivacije pomaka u (7.4) koja je jednaka

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathbf{v}, \tag{7.9}$$

te rubnih uvjeta (7.5), izraz (7.8) moguće je napisati u obliku

$$\left[AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\int_0^{\ell}N_1q\mathrm{d}x\\ \int_0^{\ell}N_2q\mathrm{d}x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

Ova relacija čini jednadžbu prikazanoga konačnog elementa. Izraz u uglatoj zagradi na lijevoj strani matrica je krutosti

$$\mathbf{k}=AE\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \tag{7.11}$$

9. KONVERGENCIJA RJEŠENJA I OPIS RAČUNALNOG PROGRAMA

Za proračun primjenom metode konačnih elemenata, stvarni fizikalni problem zamjenjuje se proračunskim modelom pri čemu se razmatrani kontinuum dijeli na konačne elemente. Cilj je da se rješenja dobivena metodom konačnih elemenata što više približe vrijednostima koje točno opisuju razmatrani problem. S povećavanjem broja konačnih elemenata numerička rješenja moraju se približavati točnim vrijednostima. To fizikalno znači da usitnjavanjem mreže konačnih elemenata energija deformiranja konvergira k točnom iznosu energije deformiranja proračunskog modela. Pritom se podrazumijeva da se mreža s većim brojem elemenata dobiva tako da se elementi početne mreže dijele na dva ili više manjih elemenata. Kako bi se ostvarilo približavanje točnom rješenju s povećanjem broja elemenata, potrebno je da interpolacijske funkcije zadovoljavaju odgovarajuće uvjete koji će se ovdje razmotriti.

Veliki broj konačnih elemenata veže sa sobom veliki broj nepoznanica koje se izračunavaju rješavanjem sustava velikog broja algebarskih jednadžbi, što nije moguće provesti bez upotrebe računala. Na taj način za rješavanje problema pomoću metode konačnih elemenata neophodna je primjena računala, što zahtijeva izradu odgovarajućih programa.

9.1. Uvjeti konvergencije

Ovisno o konačnim elementima i formulaciji metode konačnih elemenata, približavanje točnom rješenju može biti monotono i nemonotono, slika 9.1. Pri ispravnoj formulaciji metode pomaka izračunavaju se pomaci koji su po apsolutnoj vrijednosti manji od točnih vrijednosti, a usitnjavanjem mreže stalno se povećavaju, što čini konvergenciju monotonom. Konvergencija može biti nemonotona ako nisu ispunjeni svi potrebni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata.

Desna strana jednadžbe (7.23) jesu sile u čvorovima koje su posljedica vanjskog opterećenja. Uvođenjem supstitucije za derivacije matrice funkcija oblika prema (6.2), matrica krutosti se može napisati u obliku

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \mathrm{d}V \,. \tag{7.25}$$

Sile u čvorovima poradi vanjskih volumenskih sila opisane su vektorom

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} \mathrm{d}V \,, \tag{7.26}$$

a sile koje su posljedica opterećenja koje djeluje po plohama elementa na površini S_q jednake su

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \mathrm{d}S \,. \tag{7.27}$$

Tako se jednadžba trodimenzijskog proizvoljnoga konačnog elementa može napisati u obliku

$$\mathbf{k}\,\mathbf{v} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S \,. \tag{7.28}$$

Ovdje nisu prikazane koncentrirane sile koje djeluju u čvorovima konačnog elementa, a koje su unutarnje sile u odnosu na proračunski model. Uz to, nije razmatran utjecaj početnih naprezanja i početnih deformacija. U sljedećem 8. poglavlju pokazat će se da je do istih relacija za matricu krutosti i za prikazane čvorne sile moguće doći primjenom varijacijske formulacije.

7.3. Uvijanje štapa neokruglog presjeka

7.3.1. Jednadžba konačnog elementa za rješavanje problema uvijanja

Ovdje će se pokazati primjena metode težinskog reziduala za rješavanje problema uvijanja štapa neokruglog presjeka. Taj problem je opisan dvodimenzijskom Poissonovom diferencijalnom jednadžbom prema [4] u obliku

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 = 0 \,, \tag{7.29}$$

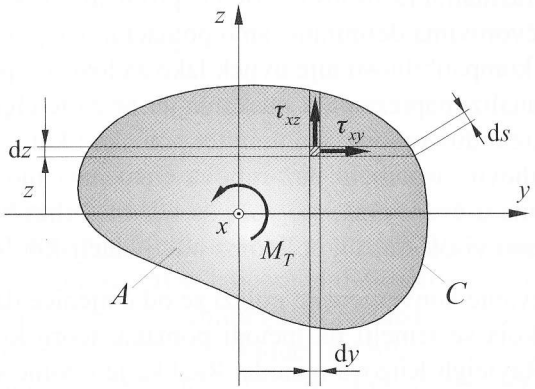
gdje je $\psi = \psi(y,z)$ torzijska funkcija naprezanja. Komponente naprezanja za presjek prema slici 7.2. jednake su

$$\tau_{xy} = G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial z}\ ,\quad \tau_{xz} = -G\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial y}\ , \tag{7.30}$$

gdje je G smični modul, a ϑ je relativni kut uvijanja. Duž ruba C poprečnog presjeka vrijedi rubni uvjet $\psi = 0$. Izraz je za moment uvijanja

$$M_T = 2G\vartheta\int_A \psi \mathrm{d}A\,, \tag{7.31}$$

gdje je A površina poprečnog presjeka.



Slika 7.2. Presjek površine A u koordinatnom sustavu y, z

Ako se pretpostavi da je poprečni presjek jednak proizvoljnom dvodimenzijskom konačnom elementu, torzijska je funkcija naprezanja za područje konačnog elementa

$$\psi(y,z) = \sum_j N_j\,\hat{\psi}_j\ . \tag{7.32}$$

Tu je relaciju moguće zapisati u obliku

$$\psi(y,z) = \mathbf{N}\,\hat{\boldsymbol{\psi}}\ . \tag{7.33}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika, a $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ je vektor čiji su članovi funkcije naprezanja u čvorovima elementa

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_j & \cdots & N_m \end{bmatrix}, \tag{7.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^T = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_j & \cdots & \psi_m \end{bmatrix}. \tag{7.35}$$

Uz primjenu Galerkinove metode analogno relaciji (7.6), izraz za težinsku prosječnu vrijednost ostatka je

njuje te se za jako male dimenzije elementa deformacija mora približiti konstantnoj vrijednosti. U tom slučaju dovoljan broj tih malih elemenata s konstantnim poljem deformacije može opisati svaku proizvoljnu raspodjelu deformacije, a na taj način i naprezanja u konstrukciji.

Treći uvjet koji je potrebno zadovoljiti da bi se osigurala monotona konvergencija, jest uvjet kompatibilnosti pomaka duž rubova susjednih elemenata. Taj uvjet je za štapne i gredne elemente sam od sebe zadovoljen jer se ti elementi spajaju samo u čvorovima. Relativno je jednostavno uvjete kompatibilnosti zadovoljiti za dvodimenzijske elemente za proračun ravninskog stanja naprezanja i deformacije, pri razmatranju osnosimetričnih problema te kod prostornih elemenata kad su u čvorovima definirani samo pomaci u, v i w u pravcu tri koordinatne osi. Uvjete kompatibilnosti nije uvijek lako zadovoljiti pri proračunu savijanja ploča i pri analizi naprezanja u ljuskama jer se za te elemente traži kontinuitet kutova zakreta duž rubova. Kontinuitet pomaka i kutova zakreta zadovoljen je ako je njihovu raspodjelu duž rubova elemenata moguće jednoznačno opisati s veličinama u čvorovima, što veže sa sobom veliki broj stupnjeva slobode, a na taj način i visok stupanj polinoma interpolacijskih funkcija.

Za bolje razumijevanje konvergencije polazi se od činjenice da se metoda konačnih elemenata, koja se temelji na metodi pomaka, teorijski može promatrati kao varijacijska Rayleigh-Ritzova metoda. Razlika je u tome što se u Rayleigh-Ritzovoj metodi interpolacijske funkcije definiraju za cijeli proračunski model, a u metodi konačnih elemenata definirane su samo za područje elementa. Za C^{m-1}-varijacijski problem interpolacijske funkcije moraju zadovoljavati geometrijske rubne uvjete koji obuhvaćaju derivacije do $(m\text{-}1)$-og reda, a uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila implicitno su sadržani u funkcionalu, što je detaljno opisano u 5. poglavlju. Točnost opisivanja problema ovisi o primijenjenim interpolacijskim funkcijama, a povećava se s povećanjem broja funkcija. U metodi konačnih elemenata funkcije oblika analogne su Rayleigh-Ritzovim funkcijama, a stupnjevi slobode u čvorovima jednaki su nepoznatim parametrima. Uz geometrijske rubne uvjete proračunskog modela, potrebno je između susjednih elemenata zadovoljiti kontinuitet pomaka zajedno s derivacijama do $(m\text{-}1)$-og reda. Povećavanje broja konačnih elemenata prilikom usitnjavanja mreže analogno je povećanju broja interpolacijskih funkcija u Rayleigh-Ritzovoj metodi. Veći broj elemenata veže sa sobom i veći broj stupnjeva slobode proračunskog modela, što pridonosi da se iznos ukupne potencijalne energije što više približi točnim vrijednostima. Konačni elementi koji zadovoljavaju spomenuti uvjet kompatibilnosti nazivaju se konformni, u protivnom elementi su nekonformni.

U prethodnom odjeljku pokazano je da se globalna jednadžba konačnih elemenata

$$\mathbf{K}\,\mathbf{V} = \mathbf{R} \tag{9.8}$$

izvodi iz uvjeta stacionarnosti ukupne potencijalne energije

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{V} - \mathbf{V}^T\mathbf{R}\,. \tag{9.9}$$

Na temelju (9.8) ukupna potencijalna energija jednaka je

$$\Pi = -\frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{R}\,, \tag{9.10}$$

a energija deformiranja ima oblik

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{R}\,. \tag{9.11}$$

Usitnjavanjem mreže konačnih elemenata izračunavaju se veći pomaci koji konvergiraju k točnim vrijednostima te se prema (9.10) smanjuje iznos ukupne potencijalne energije, a povećava se energija deformiranja što pokazuje relacija (9.11). Na taj način energija deformiranja proračunskog modela u općem slučaju manja je od točnih vrijednosti. Budući da minimum ukupne potencijalne energije za proračunski model nije zadovoljen, uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila koji su implicitno uključeni u funkcional približno su zadovoljeni.

Brzina konvergencije ovisi o stupnju polinoma interpolacijske funkcije. Viši stupanj polinoma pridonosi bržoj konvergenciji rješenja. Osim toga, poželjno je da polinomi budu potpuni te da su elementi prostorno izotropni, što znači da je raspodjela pomaka u elementu neovisna o orijentaciji koordinatnih osi. Na taj način sve komponente pomaka opisane su istim interpolacijskim funkcijama. Za specijalne tipove elemenata kao što su elementi za analizu ljuskastih konstrukcija, spomenuta prostorna izotropija može biti narušena. Za te su elemente interpolacijske funkcije usklađene s geometrijskim i kinematičkim pretpostavkama, pa je u pravilu raspodjela pomaka po debljini elementa nižeg reda od raspodjele po plohi elementa. Članovi koji pripadaju potpunim polinomima za dvodimenzijsku i trodimenzijsku analizu prikazani su u Pascalovu trokutu i Pascalovu tetraedru na slici 9.2. Ako nije moguće postići potpunost polinoma, poželjno je da je zastupljena simetričnost članova, što u Pascalovu trokutu znači simetričnost s obzirom na os prema slici 9.2. Na taj način, ako se u polinomima nalazi član x^3y, poželjno je da je zastupljen i član xy^3.

Pogreška prilikom izračunavanja proporcionalna je veličini elementa i smanjuje se sa smanjenjem dimenzija konačnih elemenata. Pritom treba voditi računa da ne dođe do geometrijske distorzije elemenata, tj. da su elementi pravilnih oblika

Vektor čvornih vrijednosti torzijske funkcije naprezanja jednak je

$$\hat{\psi}^T = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3]. \tag{7.47}$$

Pripadne funkcije oblika izvode se pomoću linearne funkcije

$$\psi(y,z) = a_1 + a_2 y + a_3 z, \tag{7.48}$$

na način koji je analogan postupku opisanom u odjeljku 6.2. Za razliku od matrice funkcija oblika (6.48), ovdje su u matrici samo tri člana

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]. \tag{7.49}$$

Funkcije oblika N_1, N_2 i N_3, analogno relaciji (6.51), jednake su

$$N_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + y\beta_i + z\gamma_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.50}$$

gdje se koeficijenti α_i, β_i i γ_i izračunavaju analogno izrazima (6.50)

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2, \quad \alpha_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, \quad \alpha_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ &\beta_1 = z_2 - z_3, \quad \beta_2 = z_3 - z_1, \quad \beta_3 = z_1 - z_2, \\ &\gamma_1 = y_3 - y_2, \quad \gamma_2 = y_1 - y_3, \quad \gamma_3 = y_2 - y_1, \end{aligned} \tag{7.51}$$

Veličina A površina je trokuta, a izračunava se prema relaciji

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{7.52}$$

Uvrštavanjem (7.49) u (7.41), te nakon deriviranja i integriranja, dobiva se matrica $\mathbf{k}$ u obliku

$$\mathbf{k} = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 & \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 & \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 & \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{bmatrix}. \tag{7.53}$$

Nakon uvrštavanja (7.49) u (7.42) i provedbe integracije, određuje se veličina $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \frac{2}{3}A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.54}$$

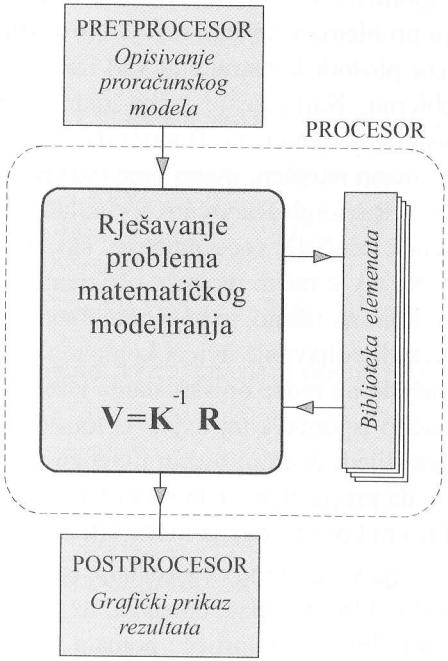
Za jednostavnije konačne elemente naprezanje je moguće relativno jednostavno izračunati u proizvoljnoj točki elementa. Kad se primjenjuje numerička integracija za izračunavanje matrice krutosti, naprezanje se najčešće izračunava u točkama numeričke integracije, a zatim interpolira po području elementa. Kad se u čvoru koji je zajednički za više elemenata dobiju različite vrijednosti naprezanja, određuje se srednja vrijednost. Za određivanje raspodjele naprezanja može se koristiti i metoda najmanjih kvadrata, kako za područje elementa tako i za cijelu mrežu proračunskog modela. Diskontinuitet naprezanja između susjednih elemenata često se uzima kao kriterij za gustoću mreže konačnih elemenata. Velike razlike između naprezanja upućuju na potrebu povećanja broja konačnih elemenata, odnosno smanjenja njihovih dimenzija. Taj se kriterij ugrađuje u automatske generatore mreže koji se temelje na računalnoj grafici.

Kao što je prethodno spomenuto, zadovoljavanje svih potrebnih uvjeta kompatibilnosti pri rješavanju problema savijanja nije jednostavno postići, što je slučaj s elementima za analizu plošnih konstrukcija kad im se formulacija temelji na C^1-varijacijskom problemu. Najčešće je teško zadovoljiti kontinuitet kutova zakreta duž rubova susjednih elemenata. Budući da su nezadovoljavanjem potrebnih uvjeta kompatibilnosti narušeni uvjeti koje interpolacijske funkcije moraju ispunjavati u skladu s Rayleigh-Ritzovom formulacijom, povećavanje broja elemenata ne mora uvijek značiti i veće pomake, što znači smanjenje krutosti proračunskog modela. Na taj je način moguće očekivati da će monotono približavanje točnom rješenju biti narušeno, te je eventualno moguće postići nemonotonu konvergenciju. Nezadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti može imati za posljedicu da grupa elemenata ne može opisati stanje konstantne deformacije iako svaki element pojedinačno ispunjava taj uvjet. U tom će slučaju konvergencija rješenja izostati. Iz toga slijedi dodatni nužan uvjet za konvergenciju nekonformnih elemenata, a to je da grupa elemenata mora biti u stanju opisati polje konstantne deformacije. Pritom konvergencija može biti nemonotona, slika 9.1.

Mogućnost opisivanja polja konstantne deformacije za grupu elemenata određuje se s "patch"-testom [14, 118]. Grupa elemenata, uz postavljanje geometrijskih rubnih uvjeta koji su potrebni da se spriječe pomaci krutog tijela, u čvorovima na rubu proračunskog modela opterećuje se silama koje uvjetuju konstantna naprezanja, a na taj način i deformacije u elementima. Ako su izračunate komponente naprezanja konstantne i pomaci su točno opisani, "patch"-test je zadovoljen i konvergencija rješenja je zajamčena. U dvodimenzijskim problemima konstantno stanje naprezanja opisano je s tri komponente, za razliku od trodimenzijskih problema u kojima šest komponenata naprezanja mora biti konstantno. Potrebno je napomenuti da rezultat "patch"-testa ovisi o geometriji konačnih elemenata. Tako, na primjer, dvodimenzijski četverokutni nekompatibilni elementi mogu konvergirati samo u slučaju ako imaju oblik pravokutnika, odnosno samo je u tom slučaju "patch"-test zadovoljen [14].

9.2. Opis programa za računanje metodom konačnih elemenata

Rješavanje problema pomoću metode konačnih elemenata provodi se primjenom računala najčešće korištenjem postojećih programskih paketa, u kojima su već programirani postupci izračunavanja opisani u prethodnim poglavljima. Glavni zadatak je izrada proračunskog modela i definiranje ulaznih podataka. Kako bi se olakšalo upravljanje i kontrola podataka, većina programskih paketa podijeljena je u nekoliko dijelova. Najčešće su to tri radne cjeline ili faze u kojima se obavlja učitavanje ulaznih podataka (pretprocesor), izračunavanje (procesor) i prikaz rezultata (postprocesor). Organizacija programa prikazana je na slici 9.3.



Slika 9.3. Shematski prikaz programa

U pretprocesoru se opisuje geometrija odabranoga proračunskog modela. Obavlja se podjela kontinuuma na konačne elemente, pri čemu je prethodno potrebno utvrditi tipove konačnih elemenata. Provodi se numeriranje čvorova i pripadnih stupnjeva slobode. Globalnim stupnjevima slobode pridružuju se lokalni stupnjevi slobode pojedinih konačnih elemenata. Ovisno o načinu numeriranja čvorova na razini konačnog elementa, definiraju se lokalni koordinatni sustavi koji označuju orijentaciju pojedinih elemenata u odnosu na globalni koordinatni sustav. Potrebno je posebnu pozornost usmjeriti na način numeriranja čvorova i

pripadnih globalnih stupnjeva slobode. Redoslijed numeriranja čvorova utječe na širinu pojasa globalne matrice krutosti. Budući da se vrijeme računanja znatno smanjuje sa smanjivanjem širine pojasa, potrebno je čvorove i stupnjeve slobode numerirati tako da pojas bude što je moguće uži. Vrijeme potrebno za rješavanje sustava jednadžbi proporcionalno je kvadratu širine pojasa pomnoženom s brojem jednadžbi. Širina pojasa smanjuje se sa smanjivanjem razlike između brojeva kojima su označeni susjedni čvorovi. U modelu s velikim brojem stupnjeva slobode najčešće se koriste numerički algoritmi pomoću kojih se čvorovi numeriraju tako da se postigne optimalna širina pojasa globalne matrice krutosti.

U ulaznim podacima potrebno je definirati rubne uvjete i opterećenje. Prema postavljenim rubnim uvjetima globalni vektor stupnjeva slobode dijeli se na aktivne i pasivne stupnjeve slobode na temelju kojih se provodi transformacija matrice krutosti. Opterećenje je moguće zadati u obliku koncentriranih sila u čvorovima te kao raspodijeljeno volumensko, površinsko i linijsko opterećenje. Osim toga, moguće je zadati i promjenu temperature koja će dovesti do toplinskih naprezanja u proračunskom modelu. Kao što je poznato, za analizu deformacija i naprezanja potrebne su konstante materijala koje je također potrebno definirati u ulaznim podacima. Za analizu izotropnih materijala u elastičnom području to su modul elastičnosti i Poissonov koeficijent. Za anizotropne materijale, kao što je poznato u mehanici kontinuuma, potreban je veći broj konstanti. Također je više podataka potrebno za analizu u elastoplastičnom području.

Da bi se izvela matrica krutosti pojedinih konačnih elemenata kojima je opisan proračunski model, a na taj način i globalna matrica krutosti, potrebno je zadati koordinate koje određuju položaj čvorova u globalnom koordinatnom sustavu. Na taj način određuje se i geometrija proračunskog modela. U složenijim problemima, što se posebno odnosi na trodimenzijske probleme s trodimenzijskim konačnim elementima, upisivanje koordinata pojedinih čvorova je mukotrpan posao. Stoga se rabe algoritmi za grafičko generiranje mreže temeljeni na tzv. CAD (Computer-Aided Design) sustavima. U odgovarajućem području proračunskog modela grafički se definira proizvoljan broj unaprijed zadanih elemenata s označenim čvorovima čije je koordinate iz definirane geometrije moguće automatski očitati. Na taj je način, uz iznimnu brzinu definiranja mreže konačnih elemenata, znatno smanjena i mogućnost greške. Prilikom stvaranja mreže potrebno je izbjeći iskrivljenje ili distorziju elemenata, tj. treba nastojati da su elementi što je moguće pravilnijeg oblika te da je odnos dimenzija najkraće i najdulje stranice u dopuštenim granicama. U slučaju pojave distordiranih elemenata, današnji grafički programi najčešće sami javljaju grešku. Na grafički način također je moguće definirati rubne uvjete i opterećenje. Na područjima s većim gradijentom deformacije i naprezanja potrebno je postići veću gustoću

mreže, tj. potrebno je zadati veći broj elemenata. Točnost rezultata umnogome ovisi o ispravnom odabiru proračunskog modela.

U procesoru se nalaze algoritmi za rješavanje problema matematičkog modeliranja. Ovdje će se razmatranja ograničiti samo na veličine koje su potrebne za linearnu statičku analizu. Na temelju ulaznih podataka, izračunavaju se matrice krutosti i vektori opterećenja različitih konačnih elemenata. Za izračunavanje matrice krutosti i vektora opterećenja najčešće se primjenjuje numerička integracija, pri čemu se koriste različiti numerički algoritmi. Gotovo u svakom programu obuhvaćeni su osnovni tipovi elemenata za jednodimenzijsku, dvodimenzijsku i trodimenzijsku analizu kontinuuma, te konačni elementi za analizu pojedinih konstrukcijskih oblika kao što su osnosimetrična tijela, grede, ploče i ljuske. Osim zatvorenih programskih paketa, postoje programi koji omogućuju proširivanje biblioteke elemenata ugradnjom novih programskih cjelina i dodavanje novih algoritama. Takav tip programa nalazi primjenu u istraživačkim projektima čiji je zadatak razvoj novih konačnih elemenata, proračunskih postupaka i algoritama.

Na temelju podataka iz biblioteke elemenata te ulaznih podataka, u procesoru se formira globalna matrica krutosti i globalni vektor opterećenja pri čemu se najčešće koristi postupak opisan u prethodnom poglavlju. Prema postavljenim rubnim uvjetima provodi se transformiranje matrice krutosti i globalnoga vektora opterećenja, nakon čega se rješava reducirani sustav jednadžbi. Potrebno je napomenuti da se, koristeći se svojstvom simetrične i pojasne matrice, u računalu spremaju samo članovi obuhvaćeni s pola pojasa koji uključuje i glavnu dijagonalu te na taj način u računanju sudjeluju samo ti članovi. Pritom se najčešće rabi tzv. skyline-postupak [14]. Rješavanje sustava jednadžbi uglavnom se provodi primjenom direktnih postupaka koji se temelje na metodi Gaussove eliminacije. Izračunavaju se nepoznati ili aktivni pomaci te reaktivne sile u osloncima. Nakon izračunavanja globalnih stupnjeva slobode, ponovno rabeći ulazne podatke definirane u pretprocesoru, određuju se stupnjevi slobode pojedinih elemenata, kako bi se nakon toga odredila raspodjela deformacije i naprezanja u svakom konačnom elementu. Naprezanja se najčešće ispisuju u čvorovima ili u točkama integracije pojedinih konačnih elemenata. Na taj način dobiva se raspodjela deformacije i naprezanja proračunskog modela.

Grafički postprocesori omogućuju grafički prikaz rezultata. Prikazuju se deformirani oblici proračunskog modela te raspodjela unutarnjih sila i naprezanja. Izračunate veličine moguće je prikazati u obliku dijagrama po površini konačnih elemenata. Vrlo često se različiti iznosi unutarnjih sila i naprezanja prikazuju pomoću različitih boja koje se unaprijed definiraju. Pregledan grafički prikaz od velike je koristi pri verifikaciji rezultata. Pritom je lako ocijeniti odgovara li stvarno stanje naprezanja očekivanoj raspodjeli te odgovara li deformirani oblik fizikalnoj slici. Pri rješavanju dinamičkih problema te problema stabilnosti mo-

guće je prikazati oblike vibriranja i gubitka stabilnosti. Ako se rješavaju problemi materijalne nelinearnosti, grafički postprocesori omogućuju crtanje zona plastificiranja u proračunskom modelu.

Korisnike programa potrebno je upozoriti na različite izvore grešaka koje mogu dovesti do zamjetnih odstupanja od realnih rješenja. Razlikuju se greške koje su posljedica operacijskih softvera, numeričke greške koje su ugrađene u programske algoritme i greške koje nastaju učitavanjem ulaznih podataka. Korisnik najčešće može utjecati samo na greške koje su posljedica ulaznih podataka, a ponajprije lošega generiranja mreže konačnih elemenata. Diskretizirani model mora biti tako odabran da postavljeni rubni uvjeti zajedno s opterećenjem što vjernije opisuju realno ponašanje konstrukcije. Za ispravno definiranje proračunskog modela potrebno je, osim metode konačnih elemenata, u dovoljnoj mjeri poznavati i teorijske osnove problema koji se rješava. Tako, na primjer, za uspješno rješavanje problema u području mehanike deformabilnih tijela potrebno je poznavati osnove mehanike kontinuuma. Osim toga, iskustvo stečeno u numeričkom modeliranju znatno će pridonijeti učinkovitosti proračuna. Više o različitim tipovima grešaka može se naći u [34].

10. PRIRODNE KOORDINATE

Kartezijev koordinatni sustav često je neprikladan za opisivanje konačnih elemenata, što je razlog da se uvode lokalne bezdimenzijske koordinate koje se definiraju pomoću geometrijskih veličina elementa. Te nove koordinate poznate su kao prirodne koordinate, a funkcije su Kartezijevih koordinata. Njihove vrijednosti u području su između nula i jedan. Za jednodimenzijske elemente jedna Kartezijeva koordinata koja određuje položaj proizvoljne točke na elementu zamijenjena je dvjema prirodnim koordinatama koje su određene omjerima duljina. Pri dvodimenzijskim problemima tri su prirodne koordinate koje čine omjere površina, a kod prostornih problema četiri koordinate opisane su omjerima volumena. Na taj način razlikuju se prirodne duljinske, površinske i volumenske koordinate. Osim tih koordinata, često se primjenjuju i druge prirodne koordinate definirane tako da su njihove vrijednosti između nula i jedan, a mogu biti i u području između –1 i +1.

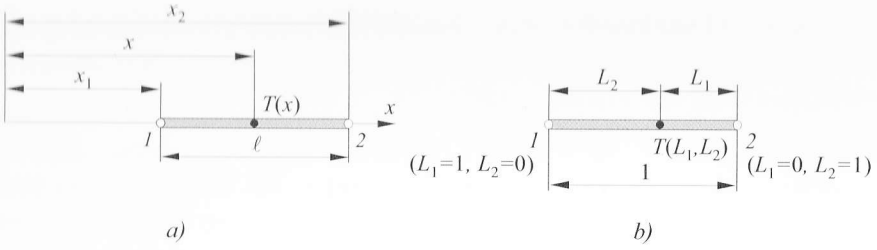
10.1. Jednodimenzijski problemi

U rješavanju jednodimenzijskih problema primjenjuju se dvije duljinske koordinate koje su linearne funkcije jedne koordinate u Kartezijevu koordinatnom sustavu u kojemu je element definiran. Ako je položaj proizvoljne točke T u području jednodimenzijskog elementa u Kartezijevu koordinatnom sustavu određen koordinatom x, slika 10.1a, u prirodnom koordinatnom sustavu toj točki pridružene su dvije bezdimenzijske koordinate L_1 i L_2, prema slici 10.1b. Veza između koordinate x i prirodnih koordinata jednaka je

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 , \tag{10.1}$$

gdje su x_1 i x_2 koordinate čvorova elementa. Prirodne koordinate L_1 i L_2 međusobno su zavisne veličine te vrijedi relacija

$$L_1 + L_2 = 1 . \tag{10.2}$$



a) *b)*

Slika 10.1. Jednodimenzijski element: a) Kartezijeve koordinate, b) prirodne koordinate

Dvije jednadžbe (10.1) i (10.2) moguće je prikazati u matričnom obliku kao sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{10.3}$$

čijim se rješavanjem dobivaju izrazi za prirodne koordinate u obliku

$$L_1(x) = \frac{x_2 - x}{\ell}, \qquad L_2(x) = \frac{x - x_1}{\ell}. \tag{10.4}$$

Te relacije pokazuju da se prirodna koordinata L_1 linearno mijenja od jedinične vrijednosti u lijevom čvoru elementa pa do nule u desnom čvoru. Koordinata L_2 od nule u lijevom čvoru poraste na jedinični iznos u desnom čvoru. Na taj način lijevi čvor ima prirodne koordinate (1,0), a desni (0,1). Na temelju poznatog svojstva funkcija oblika koje je opisano u 6. poglavlju, lako je zaključiti da su ovdje prikazane duljinske koordinate jednake linearnim funkcijama oblika osnovnog štapnoga konačnog elementa. Pri računanju s prirodnim koordinatama često je potrebno provesti integriranje po duljini elementa kad se pod integralom pojavljuju funkcije prirodnih koordinata. Pritom može korisno poslužiti sljedeća relacija:

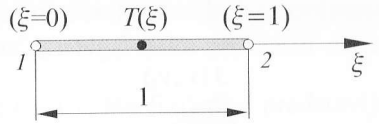
$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^i L_2^j \mathrm{d}x = \frac{i!\,j!\,(x_2 - x_1)}{(i+j+1)!}, \tag{10.5}$$

gdje su i i j cjelobrojni eksponenti, a ! je oznaka faktorijele.

Osim gore prikazanih duljinskih koordinata, gdje su za određivanje položaja točke na jednodimenzijskom elementu potrebne dvije veličine, moguće je element opisati pomoću jedne prirodne koordinate. Pritom se element iz Kartezijeva koordinatnog sustava preslikava u jediničnu duljinu, pri čemu je položaj točke određen samo s jednom bezdimenzijskom koordinatom ξ čija je maksimalna vrijednost jednaka jedinici. Primjenom linearne transformacije

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi, \tag{10.6}$$

element na slici 10.1a moguće je preslikati u jedinični element prikazan na slici 10.2., gdje je položaj točke T određen koordinatom ξ.



Slika 10.2. Element jedinične duljine

Pomoću (10.6) prirodna koordinata ξ prikazuje se kao funkcija Kartezijeve koordinate

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{\ell}. \tag{10.7}$$

Iz izraza (10.7) lako je zaključiti da je u čvoru *1*, $\xi = 0$, a za čvor *2* jednako je $\xi = 1$. Na taj način za prirodnu koordinatu ξ vrijedi $0 \le \xi \le 1$. Veza između elementarne duljine u Kartezijevu i prirodnom koordinatnom sustavu jednaka je

$$\mathrm{d}x = (x_2 - x_1)\mathrm{d}\xi = \ell\,\mathrm{d}\xi. \tag{10.8}$$

Duljinske prirodne koordinate također je moguće primijeniti za element jedinične duljine, pa su u tom slučaju dvije duljinske koordinate jednake

$$L_1 = 1 - \xi, \qquad L_2 = \xi. \tag{10.9}$$

Primjenom relacija (10.9) moguće je linearnu transformaciju (10.6) prikazati pomoću duljinskih koordinata L_1 i L_2 pri čemu se dobiva relacija jednaka izrazu (10.1). Prednost prirodnih koordinata u odnosu na klasičan Kartezijev koordinatni sustav mnogo je više izražena u dvodimenzijskim i trodimenzijskim problemima.

10.2. Dvodimenzijski problemi

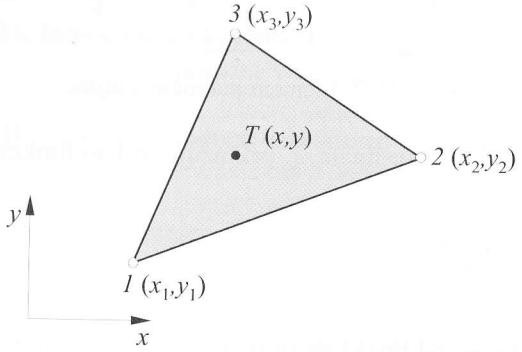
Analogno relaciji (10.1), gdje je u Kartezijevu koordinatnom sustavu položaj proizvoljne točke na štapnom konačnom elementu prikazan pomoću koordinata krajnjih čvorova uvođenjem prirodnih duljinskih koordinata, ovdje se koordinate proizvoljne točke na površini trokuta $T(x, y)$ prikazuju pomoću koordinata vrhova trokuta, slika 10.3, na sljedeći način:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3,$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 , \tag{10.10}$$

gdje su L_1, L_2 i L_3 prirodne površinske ili trokutne koordinate od kojih su samo dvije međusobno neovisne, što se vidi iz relacije

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 . \tag{10.11}$$



Slika 10.3. Trokutni element u Kartezijevu koordinatnom sustavu

Izrazi (10.10) i (10.11) čine sustav jednadžbi koji je moguće zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{10.12}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (10.12) dobivaju se izrazi za prirodne koordinate koji se, zbog jednostavnosti, prikazuju jednom relacijom

$$L_i(x,y) = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y), \qquad i = 1,2,3 \tag{10.13}$$

gdje je

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 , && \alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 , && \alpha_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 , \\ &\beta_1 = y_2 - y_3 , && \beta_2 = y_3 - y_1 , && \beta_3 = y_1 - y_2 , \\ &\gamma_1 = x_3 - x_2 , && \gamma_2 = x_1 - x_3 , && \gamma_3 = x_2 - x_1 . \end{aligned} \tag{10.14}$$

U relaciji (10.13) A je površina trokuta čiji su vrhovi određeni koordinatama prema slici 10.3.

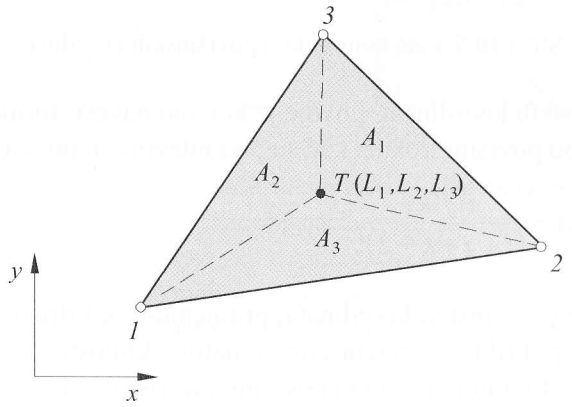
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 . \tag{10.15}$$

Fizikalno značenje ovdje uvedenih prirodnih koordinata pokazat će se na primjeru izraza za koordinatu L_1. Nije teško provjeriti da je dio izraza u (10.13) za $i = 1$ jednak $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y)$, što fizikalno predstavlja površinu između točaka T, *2* i *3* unutar trokuta na slici 10.3. Na taj način, ako tu trokutnu površinu označimo s A_1, prirodna koordinata L_1 jednaka je

$$L_1 = \frac{A_1}{A} . \tag{10.16}$$

Analogno je moguće prikazati prirodne koordinate L_2 i L_3

$$L_2 = \frac{A_2}{A}, \qquad L_3 = \frac{A_3}{A} . \tag{10.17}$$

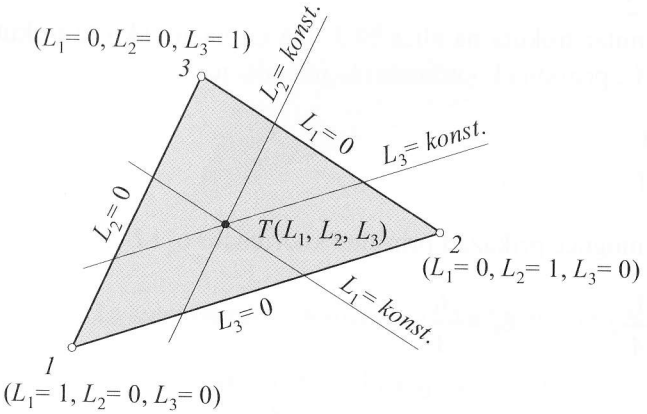


Slika 10.4. Prirodne koordinate

Površine A_1, A_2 i A_3 prikazane su na slici 10.4. gdje su točki T pridružene prirodne koordinate L_1, L_2 i L_3. Iz slike se vidi da su površine A_1, A_2 i A_3 smještene nasuprot vrhova trokuta *1, 2* i *3*. Na taj način prirodne koordinate čine omjer površina trokuta, što je razlog da se nazivaju površinske koordinate, a često se rabi i naziv trokutne koordinate. To su bezdimenzijske veličine koje se linearno mijenjaju od nule do maksimalne jedinične vrijednosti. Tako, na primjer, koordinata L_1 linearno se mijenja od nule na rubu između vrhova *2* i *3* do jedinice u vrhu *1*. Paralele sa stranicom trokuta *2-3* su crte duž kojih je vrijed-

nost za L_1 konstantna. Analogno vrijedi za ostale koordinate L_2 i L_3, što je prikazano na slici 10.5.

Promjena prikazanih prirodnih koordinata po površini trokutnog elementa jednaka je raspodjeli linearnih funkcija oblika osnovnog trokutnog elementa koje su opisane u odjeljku 6.2. Na taj način, funkcije oblika N_1, N_2 i N_3 jednake su prirodnim koordinatama L_1, L_2 i L_3, što jasno pokazuju i relacije (6.51) i (10.13).



Slika 10.5. Crte konstantnih površinskih koordinata

Kao i kod duljinskih koordinata, i ovdje je korisno navesti formulu za izračunavanje integrala po površini trokuta kad su pod integralom površinske koordinate

$$\int_A L_1^i L_2^j L_3^k \mathrm{d}A = \frac{i!\,j!\,k!}{(i+j+k+2)!} 2A\,. \tag{10.18}$$

Osim navedenih površinskih koordinata, primjenjuje se i drugi prirodni koordinatni sustav ξ, η. Prilikom izračunavanja matrice krutosti često se integriranje po proizvoljno definiranoj trokutnoj površini u Kartezijevim koordinatama zamjenjuje s mnogo jednostavnijom integracijom po površini pravokutnog jediničnog trokuta u koordinatnom sustavu ξ, η. Pravokutan trokut s jediničnim katetama u tom bezdimenzijskom lokalnom koordinatnom sustavu dobiva se preslikavanjem proizvoljnog trokuta iz koordinatnog sustava x, y primjenom relacija:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta\,,$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta\,. \tag{10.19}$$

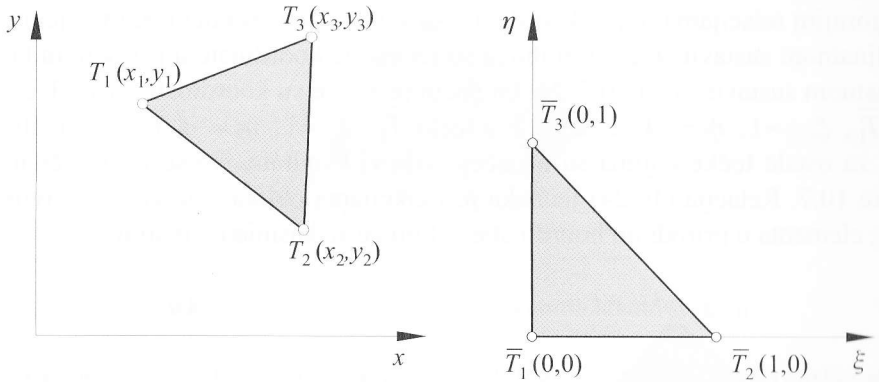
Ovdje su x_1, y_1 do x_3, y_3 koordinate vrhova trokuta T_1 do T_3 koji su numerirani u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu. Trokut u Kartezijevu koor-

dinatnom sustavu i jedinični trokut u novom koordinatnom sustavu ξ, η prikazani su na slici 10.6. Veza između elementarne površine u koordinatnom sustavu x, y i u prirodnom koordinatnom sustavu ξ, η jednaka je

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\,, \tag{10.20}$$

gdje je $\det \mathbf{J}$ determinanta Jacobijeve matrice

$$\det \mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \tag{10.21}$$



Slika 10.6. Trokut u Kartezijevu koordinatnom sustavu i jedinični trokut u prirodnim koordinatama

Iznos determinante (10.21) jednak je dvostrukoj površini trokuta u Kartezijevu koordinatnom sustavu. Za prikazani jedinični trokut, površinske koordinate jednake su

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - \xi - \eta\,, \\ L_2 &= \xi\,, \\ L_3 &= \eta\,. \end{aligned} \tag{10.22}$$

Preuređenjem izraza (10.19), uz supstituciju (10.22), lako je pokazati da je linearna transformacija (10.19) jednaka relaciji (10.10).

Proizvoljni četverokutni element u Kartezijevu koordinatnom sustavu također je moguće preslikati u kvadrat s jediničnim koordinatama vrhova u prirodnom be-

zdimenzijskom koordinatnom sustavu ξ, η, slika 10.7. Relacije pomoću kojih se obavlja preslikavanje jednake su

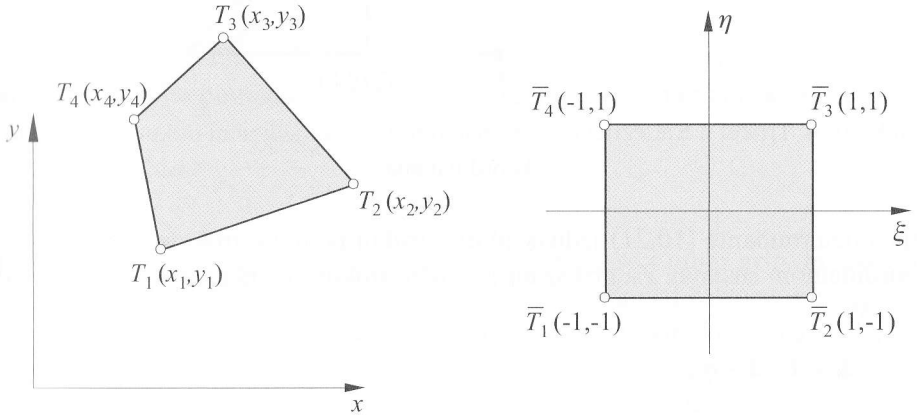
$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i\,,$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i\,, \tag{10.23}$$

gdje je

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\,. \tag{10.24}$$

U gornjim relacijama x_i, y_i koordinate su vrhova četverokuta u Kartezijevu koordinatnom sustavu, a ξ_i, η_i njihove su jedinične koordinate u prirodnom koordinatnom sustavu, slika 10.7. Na taj način prirodne su koordinate za $i=1$ u točki $\overline{T}_1$, $\xi_1=-1$, $\eta_1=-1$, a za $i=2$ u točki $\overline{T}_2$, $\xi_2=1$, $\eta_2=-1$ i tako na isti način za ostale točke kojima su označeni vrhovi kvadrata, što se može očitati sa slike 10.7. Relacija (10.24) jednaka je funkcijama oblika osnovnoga pravokutnog elementa u prirodnim koordinatama koji će se kasnije razmatrati.



Slika 10.7. Četverokut u Kartezijevu koordinatnom sustavu i kvadrat s jediničnim koordinatama vrhova u prirodnom koordinatnom sustavu

10.3. Trodimenzijski problemi

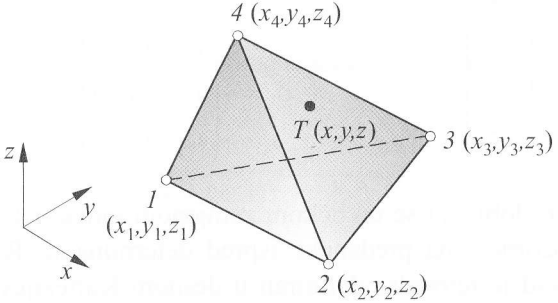
Analogno površinskim koordinatama u dvodimenzijskoj analizi, za rješavanje trodimenzijskih problema primjenjuju se volumenske koordinate koje su jedna-

ke omjerima volumena tetraedra. Položaj proizvoljne točke u tetraedru moguće je prikazati u Kartezijevu koordinatnom sustavu u ovisnosti o koordinatama vrhova, prema slici 10.8., na sljedeći način

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4, \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4, \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4, \end{aligned} \tag{10.25}$$

gdje su L_1, L_2, L_3 i L_4 volumenske koordinate od kojih su tri međusobno neovisne, odnosno vrijedi relacija

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \tag{10.26}$$



Slika 10.8. Tetraedar u Kartezijevu koordinatnom sustavu

Relacije (10.25) i (10.26) mogu se prikazati u matričnom obliku kao sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{10.27}$$

čije je rješenje jednako izrazima za prirodne volumenske koordinate

$$L_i(x,y,z) = \frac{1}{6V}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z), \qquad i = 1,2,3,4. \tag{10.28}$$

U relaciji (10.28) V je volumen tetraedra

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{10.29}$$

a koeficijenti α_i, β_i, γ_i i δ_i izračunavaju se analogno sljedećim relacijama za $i = 1$:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \beta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \delta_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{10.30}$$

Ostali koeficijenti dobivaju se cikličkom zamjenom indeksa 1, 2, 3 i 4. Pritom treba obratiti pozornost na predznake ispred determinanti. Relacije (10.29) i (10.30) vrijede kad je tetraedar definiran u desnom Kartezijevu koordinatnom sustavu i kad su vrhovi numerirani tako da su brojevi od *1* do *3* poredani u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu promatraju li se iz vrha koji je označen brojem *4*. Dio izraza (10.28) koji je jednak $(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z)/6$ opisuje dio volumena tetraedra V_i koji je omeđen s proizvoljnom točkom T i s tri vrha na stranici koja leži nasuprot četvrtom vrhu i. Na taj način pokazano je da su volumenske koordinate jednake omjeru volumena dvaju tetraedara

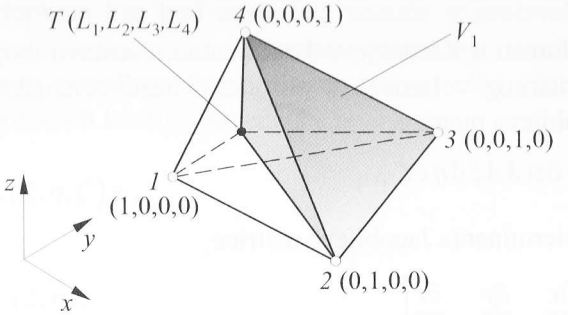
$$L_i = \frac{V_i}{V}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{10.31}$$

što je razlog da se te koordinate često nazivaju i tetraedarske koordinate. Boljem razumijevanju pridonijet će slika 10.9. na kojoj je označen volumen V_1 tetraedra koji je opisan točkom T i stranicom koja leži nasuprot vrhu *1*, a pridruženi su joj vrhovi *2*, *3* i *4*. Na taj način određena je volumenska koordinata L_1

$$L_1 = \frac{V_1}{V}. \tag{10.32}$$

Analogno su definirane ostale volumenske koordinate. Vrhovi tetraedra na slici 10.9. opisani su s po četiri volumenske koordinate (L_1, L_2, L_3, L_4). I tu je potrebno napomenuti da su prikazane volumenske koordinate jednake linearnim

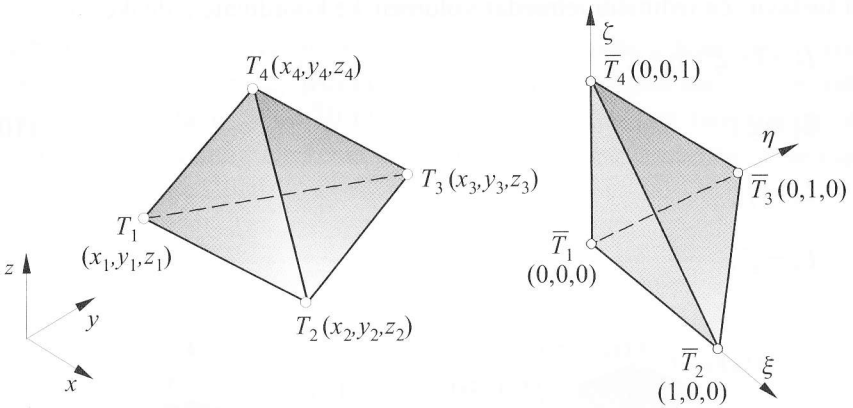
funkcijama oblika osnovnoga tetraedarskog elementa, što će biti pokazano u sljedećem izlaganju.



Slika 10.9. Volumenske ili tetraedarske koordinate

Formula za izračunavanje volumenskog integrala za umnožak volumenskih koordinata jednaka je

$$\int_V L_1^i L_2^j L_3^k L_4^l \mathrm{d}V = \frac{i!\,j!\,k!\,l!}{(i+j+k+l+3)!} 6V\,. \tag{10.33}$$



Slika 10.10. Tetraedar u Kartezijevu koordinatnom sustavu i jedinični tetraedar u prirodnim koordinatama

Analogno prethodnom odjeljku i ovdje se uvodi prirodni trodimenzijski koordinatni sustav ξ, η, ζ u kojemu se preslikavanjem dobiva jedinični tetraedar. Proizvoljni tetraedar u Kartezijevu koordinatnom sustavu moguće je preslikati u jedinični tetraedar u lokalnom bezdimenzijskom koordinatnom sustavu ξ, η, ζ, slika 10.10., pomoću relacija za linearnu transformaciju

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta\,,$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_1)\zeta\,, \tag{10.34}$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + (z_4 - z_1)\zeta\,.$$

Elementarni volumen u Kartezijevu koordinatnom sustavu moguće je prikazati pomoću elementarnog volumena u prirodnim bezdimenzijskim koordinatama primjenom Jacobijeve matrice

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \det\mathbf{J}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{10.35}$$

gdje je $\det\mathbf{J}$ determinanta Jacobijeve matrice

$$\det\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial z}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta} \end{vmatrix}, \tag{10.36}$$

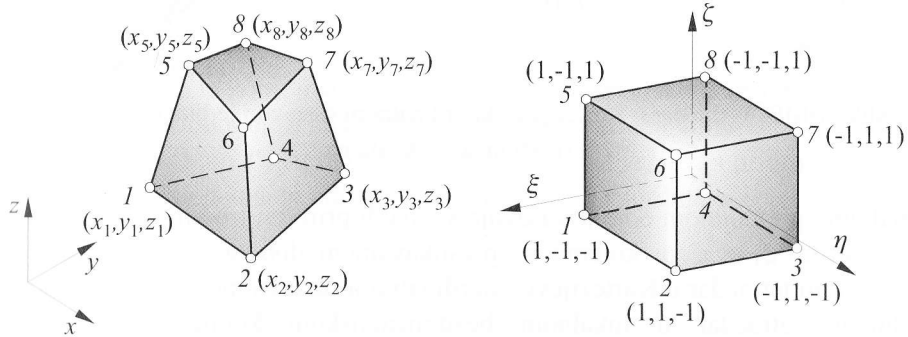
čiji je iznos jednak šesterostrukom volumenu tetraedra u Kartezijevu koordinatnom sustavu. Za jedinični tetraedar volumenske koordinate jednake su

$$L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta\,,$$

$$L_2 = \xi\,, \tag{10.37}$$

$$L_3 = \eta\,,$$

$$L_4 = \zeta\,.$$



Slika 10.11. Heksaedar u Kartezijevu koordinatnom sustavu i kocka s jediničnim koordinatama vrhova u prirodnom koordinatnom sustavu

Nije teško pokazati da se pomoću relacija (10.37) izrazi za linearnu transformaciju (10.34) mogu napisati u obliku koji je jednak relacijama (10.25).

Analognim postupkom kao kod tetraedra, moguće je proizvoljni heksaedar iz globalnog Kartezijeva koordinatnog sustava preslikati u kocku čiji su vrhovi opisani jediničnim prirodnim koordinatama, prema slici 10.11. Veza između Kartezijevih i prirodnih koordinata jednaka je

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, x_i\,,$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, y_i\,, \tag{10.38}$$

$$z = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, z_i\,,$$

gdje je

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\,. \tag{10.39}$$

Koordinate x_i, y_i, z_i određuju položaj vrhova heksaedra u Kartezijevu koordinatnom sustavu, a ξ_i, η_i, ζ_i jedinične su koordinate vrhova kocke u prirodnom koordinatnom sustavu, slika 10.11. Izraz (10.39) jednak je funkcijama oblika osnovnoga prizmatičnog elementa u prirodnim koordinatama koji će se razmatrati u izlaganju koje slijedi.

11. INTERPOLACIJSKI POLINOMI

Primjenom interpolacijskih polinoma moguće je opisati raspodjelu varijable u razmatranom području ovisno o njezinim zadanim vrijednostima u odgovarajućem broju točaka, koje mogu uključiti i njezine derivacije. Na taj način moguće je izravno izvesti relaciju za raspodjelu pomaka po površini ili volumenu konačnog elementa ovisno o vrijednostima pomaka ili pomaka i njegovih derivacija u čvorovima. Pritom su za jednodimenzijske elemente funkcije oblika jednake interpolacijskim polinomima ili se izračunavaju množenjem više jednodimenzijskih interpolacijskih polinoma kod dvodimenzijskih i trodimenzijskih elemenata. Za konačne elemente kod kojih je potrebno zadovoljiti C^0-kontinuitet primjenjuju se Lagrangeovi interpolacijski polinomi, a kod problema za koje se zahtijeva i kontinuitet derivacija odgovarajućih varijabli koristi se Hermiteova interpolacija.

11.1. Lagrangeovi interpolacijski polinomi

Lagrangeovi interpolacijski polinomi primjenjuju se kad je potrebno provući krivulju kroz n zadanih točaka $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $T_3(x_3, y_3)$, ..., $T_n(x_n, y_n)$ u koordinatnom sustavu x, y, prema slici 11.1., pri čemu razmak između točaka ne mora biti jednak. Funkcija koja opisuje krivulju u zadanom koordinatnom sustavu, polinom je stupnja n-1 u obliku

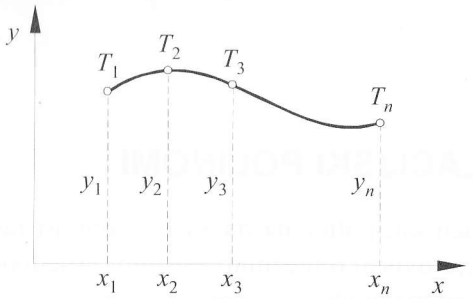
$$y(x) = l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + \ldots + l_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} l_i(x)y_i, \tag{11.1}$$

gdje su $l_i(x)$ jednodimenzijski Lagrangeovi interpolacijski polinomi stupnja $n-1$, prikazani sljedećom relacijom

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \tag{11.2}$$

Lako je zaključiti da za relaciju (11.2) vrijedi

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{za } i=j\\ 0 & \text{za } i\neq j.\end{cases} \tag{11.3}$$



Slika 11.1. Lagrangeova interpolacija

Ako su zadane četiri točke $T_1(2;\,2)$, $T_2(3{,}5;\,3)$, $T_3(5{,}5;\,2{,}5)$ i $T_4(8;\,3{,}5)$, krivulju koja kroz njih prolazi moguće je opisati jednadžbom

$$y(x)=\sum_{i=1}^{4} l_i(x)y_i\,, \tag{11.4}$$

pri čemu se Lagrangeovi interpolacijski polinomi izračunavaju pomoću relacija

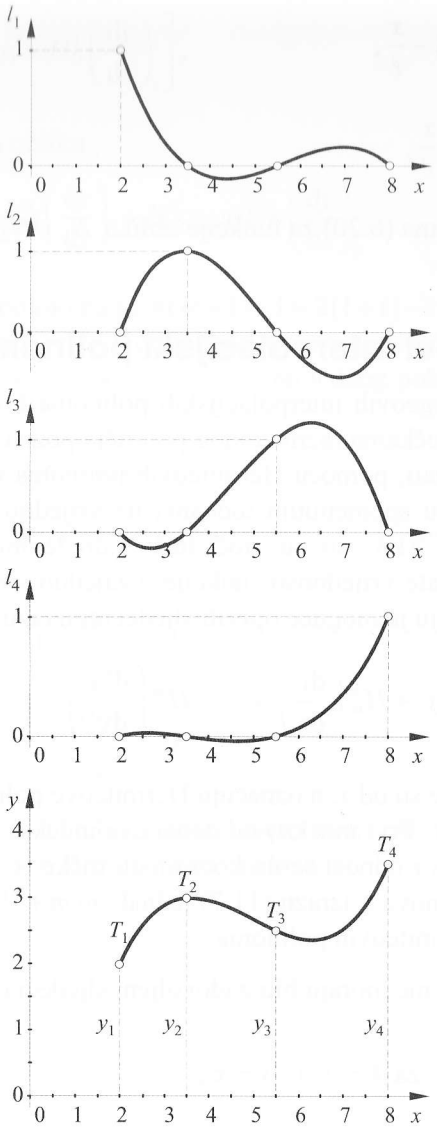
$$l_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)},$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)},$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}, \tag{11.5}$$

$$l_4(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Za zadane vrijednosti apcisa, krivulje opisane relacijama (11.5) grafički su prikazane na slici 11.2. Na istoj je slici za zadane vrijednosti ordinata prikazana i funkcija $y(x)$. Potrebno je uočiti da Lagrangeov interpolacijski polinom $l_i(x)$ za $x=x_i$ ima vrijednost jednaku jedinici, a u svim ostalim točkama vrijednost mu je jednaka nuli, što je karakteristično za funkcije oblika konačnih elemenata.



Slika 11.2. Lagrangeovi interpolacijski polinomi i funkcija $y(x)$

Na taj način Lagrangeovi interpolacijski polinomi mogu se primijeniti za direktno određivanje funkcija oblika. U tom slučaju broj točaka n odgovara broju čvorova jednodimenzijskoga konačnog elementa, y predstavlja interpolacijsku varijablu, a interpolacijski polinomi $l_i(x)$ funkcije su oblika. Tako je za štapni konačni element s dva čvora, slika 6.1., $n = 2$, a interpolacijska je varijabla pomak u. Ako je ishodište koordinatnog sustava u lijevom čvoru, koordinate čvorova su $x_1 = 0$, i $x_2 = \ell$, pa su Lagrangeovi polinomi na temelju relacije (11.2) sljedeće linearne funkcije:

$$l_1(x)=\frac{x-\ell}{0-\ell}=1-\frac{x}{\ell},$$

$$l_2(x)=\frac{x-0}{\ell-0}=\frac{x}{\ell}, \qquad (11.6)$$

koje su jednake izrazima (6.20) za funkcije oblika N_1 i N_2.

11.2. Hermiteovi interpolacijski polinomi

Za razliku od Lagrangeovih interpolacijskih polinoma koji se primjenjuju kad su u odgovarajućim točkama razmatranog područja poznate vrijednosti funkcije koju je potrebno opisati, pomoću Hermiteovih polinoma izvodi se interpolacijska funkcija kad su u spomenutim točkama uz vrijednosti funkcije poznate i njezine derivacije. Ako su u točkama određenim koordinatama x_1, $x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n$ poznate vrijednosti funkcije y zajedno s njezinim derivacijama do m-tog reda, funkciju je moguće opisati sljedećim izrazom:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[H_{0i}^{m}y_i+H_{1i}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i+\ldots+H_{ji}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}^j y}{\mathrm{d}x^j}\right)_i+\ldots+H_{mi}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}\right)_i\right]. \qquad (11.7)$$

Veličine H_{ji}^{m} funkcije su od x, a označuju Hermiteove polinome. Njihov stupanj jednak je $n(m+1)-1$. Prvi indeks j od donja dva indeksa odnosi se na red derivacije, a drugi indeks i odnosi se na koordinatu točke x_i. Nije teško zaključiti da je ukupan broj članova u izrazu (11.7) jednak $n(m+1)$, a red funkcije $y(x)$ jednak je stupnju Hermiteovih polinoma.

Za Hermiteove polinome moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\frac{\mathrm{d}^k\left(H_{ji}^{m}\right)}{\mathrm{d}x^k}=1 \qquad \text{za } k=j \text{ i } x=x_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}^k\left(H_{ji}^{m}\right)}{\mathrm{d}x^k}=0 \qquad \text{za } k\neq j \text{ ili } x\neq x_i. \qquad (11.8)$$

Primjena ovih polinoma pokazat će se na sljedećem jednostavnom primjeru. Neka su zadane dvije točke s koordinatama $x_1=0$ i $x_2=\ell$, koje omeđuju područje u kojemu je potrebno opisati interpolacijsku funkciju, a u točkama su zadane vrijednosti funkcije i njezinih prvih derivacija. U tom slučaju $n=2$ i $m=1$, pa relacija (11.7) postaje

$$y(x)=\sum_{i=1}^{2}\left[H_{0i}^{1}y_i+H_{1i}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i\right], \tag{11.9}$$

što se može napisati u obliku

$$y(x)=H_{01}^{1}y_1+H_{11}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1+H_{02}^{1}y_2+H_{12}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2. \tag{11.10}$$

Stupanj Hermiteovih polinoma je $n(m+1)-1=2(1+1)-1=3$, te je na taj način i $y(x)$ funkcija trećega reda. Koeficijenti polinoma izračunavaju se iz uvjeta (11.8). Ovdje će se prikazati određivanje samo jednog polinoma H_{01}^{1} čiji je oblik jednak

$$H_{01}^{1}=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3. \tag{11.11}$$

Koeficijenti a_1 do a_4 izračunavaju se iz uvjeta (11.8) koji su za funkciju H_{01}^{1} jednaki

$$\text{za } x=x_1:\quad H_{01}^{1}=1,\ \frac{\mathrm{d}H_{01}^{1}}{\mathrm{d}x}=0,$$

$$\text{za } x=x_2:\quad H_{01}^{1}=0,\ \frac{\mathrm{d}H_{01}^{1}}{\mathrm{d}x}=0. \tag{11.12}$$

Uvrštavanjem (11.11) u (11.12) i nakon deriviranja, dobiva se za vrijednosti koordinata $x_1=0$ i $x_2=\ell$ sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} &a_1=1,\\ &a_2=0,\\ &a_1+a_2\ell+a_3\ell^2+a_4\ell^3=0,\\ &a_2+2a_3\ell+3a_4\ell^2=0, \end{aligned} \tag{11.13}$$

čija rješenja su koeficijenti polinoma

$$a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-\frac{3}{\ell^2},\ a_4=\frac{2}{\ell^3}. \tag{11.14}$$

Na temelju (11.14), Hermiteov polinom H_{01}^{1} jednak je

$$H_{01}^{1}=1-3\frac{x^2}{\ell^2}+2\frac{x^3}{\ell^3}. \tag{11.15}$$

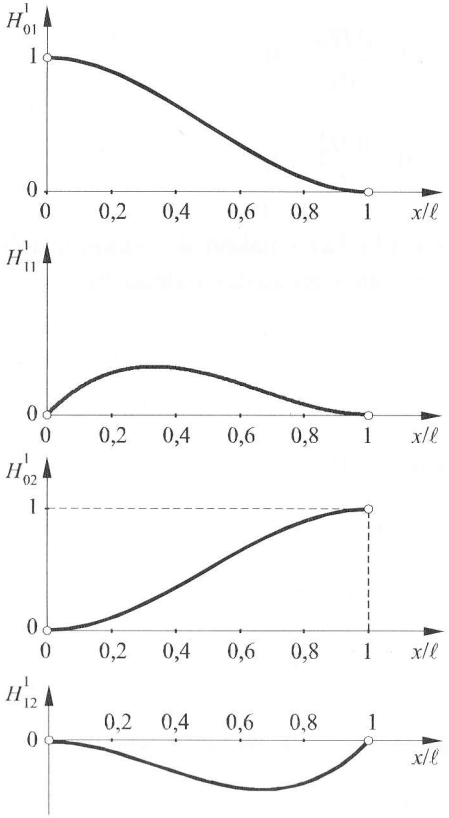
Analognim postupkom izračunavaju se ostali Hermiteovi polinomi koji su prikazani sljedećim relacijama:

$$H_{11}^1 = x - 2\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2},$$

$$H_{02}^1 = 3\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3}, \tag{11.16}$$

$$H_{12}^1 = -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}.$$

Funkcije (11.15) i (11.16) grafički su prikazane na slici 11.3.



Slika 11.3. Hermiteovi polinomi opisani funkcijama trećeg reda

Kao što se vidi na slici, u točki $x_1 = 0$ vrijedi za Hermiteove polinome $H_{01}^1 = 1$ i $\frac{\mathrm{d}H_{11}^1}{\mathrm{d}x} = 1$, a ostale funkcije zajedno s njihovim derivacijama jednake su nuli. Analogno vrijedi za točku $x_2 = \ell$. Naime, u toj točki su vrijednosti $H_{02}^1 = 1$ i $\frac{\mathrm{d}H_{12}^1}{\mathrm{d}x} = 1$, dok su ostale funkcije i njihove derivacije jednake nuli. Kasnije će se pokazati da se ti Hermiteovi polinomi mogu primijeniti za neposredno određivanje funkcija oblika osnovnoga grednoga konačnog elementa, gdje su stupnjevi slobode pomaci i prve derivacije pomaka.

12. JEDNODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI

Jednodimenzijski konačni elementi najjednostavniji su konačni elementi. Primjenjuju se za jednodimenzijsku analizu kontinuuma pri čemu su sve varijable funkcije samo jedne koordinate. Ovdje će se prikazati konačni elementi za rješavanje problema osno opterećenog štapa, problema uvijanja te za rješavanje problema savijanja. Za elemente za rješavanje problema uvijanja i osnog opterećenja rabi se naziv štapni konačni elementi, a elementi opterećeni na savijanje gredni su elementi. Najjednostavniji elementi s po dva čvora osnovni su elementi, a elementi s više čvorova nazivaju se elementi višega reda. Osim izvođenja matrice krutosti, ovdje će se prikazati izračunavanje čvornih sila poradi kontinuiranog opterećenja po površini elementa i koncentriranih sila u proizvoljnoj točki elementa. Za osnovni štapni element razmatrat će se utjecaj početnih deformacija koje su posljedica promjene temperature. Primjenjuje se varijacijska formulacija konačnih elemenata koja je detaljno opisana u osmom poglavlju.

12.1. Osnovni štapni element

Ovaj element već je opisan u šestom poglavlju, gdje je razmatrana direktna formulacija konačnih elemenata. Kao što je prikazano na slici 6.1., sastoji se od dva čvora, a stupnjevi slobode pomaci su u pravcu uzdužne osi x. Za razliku od direktne formulacije, gdje se naprezanje zamjenjuje s ekvivalentnim čvornim silama, a nakon toga prema relaciji (6.5) izvodi se matrica krutosti, ovdje se matrica krutosti izračunava pomoću relacije (8.22) koja se dobiva primjenom varijacijskog principa. Izvođenje matrice funkcija oblika $\mathbf{N}$ i matrice $\mathbf{B}$, koja povezuje deformaciju u elementu i pomake u čvorovima, provodi se na isti način kao i u direktnoj formulaciji te se ovdje postupak neće ponavljati. Izrazi za $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$ preuzet će se iz odjeljka 6.1.

Budući da je za štapni konačni element prema slici 6.1. elementarna duljina $ds = dx$, matrica krutosti prema relaciji (8.22) jednaka je

$$\mathbf{k} = \int_0^{\ell} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx . \tag{12.1}$$

Iz konstitutivne jednadžbe (3.65) slijedi izraz za matricu elastičnosti **D** u obliku

$$\mathbf{D} = [EA] . \tag{12.2}$$

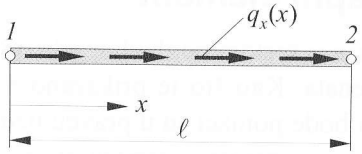
Uvrštavanjem (12.2) i relacije (6.25) za matricu **B** u (12.1), nakon integriranja dobiva se

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{12.3}$$

Nije teško zaključiti da je ovako izračunata matrica jednaka izrazu koji je izveden u odjeljku 6.1. primjenom direktne formulacije. Koncentrirane sile u čvorovima prikazane na slici 6.1. opisane su vektorom **F** prema relaciji (6.26).

Ako je po duljini konačnog elementa zadano promjenjivo osno opterećenje $q_x = q_x(x)$, prema slici 12.1., sile u čvorovima izračunavaju se pomoću relacije (8.18). Pritom je $\mathbf{q}_b = [q_x]$, elementarna površina uz pretpostavku jedinične širine elementa jednaka je $dS = 1 \cdot dx$, a matrica je funkcija oblika $\mathbf{N}_S = \mathbf{N}$. Na taj način se uvrštavanjem (6.19) dobiva

$$\mathbf{F}_S = \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{\ell} \\ \dfrac{x}{\ell} \end{bmatrix} [q_x(x)] dx . \tag{12.4}$$



Slika 12.1. Uzdužno kontinuirano opterećenje

U specijalnom slučaju kad je kontinuirano opterećenje konstantno, tj. kad je $q_x(x) = q_0$, pomoću relacije (12.4) izračunavaju se sile u čvorovima

$$\mathbf{F}_S = q_0 \ell \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} . \tag{12.5}$$

Ako se kontinuirano opterećenje duž štapa mijenja linearno od q_1 na lijevom kraju do maksimalne vrijednosti q_2 na desnom kraju, prema relaciji $q_x(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{\ell} x$, sile u čvorovima jednake su

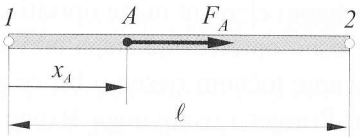
$$\mathbf{F}_S = \frac{\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \tag{12.6}$$

Kad u proizvoljnoj točki konačnog elementa između čvorova *1* i *2* djeluje koncentrirana sila, na primjer sila F_A u točki A s koordinatom x_A, prema slici 12.2., sile u čvorovima izračunavaju se pomoću izraza

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{N}^T(x_A) F_A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_A}{\ell} \\ \frac{x_A}{\ell} \end{bmatrix} F_A, \tag{12.7}$$

gdje je $\mathbf{N}(x_A)$ iznos funkcija oblika u točki hvatišta sile. Na taj način, ako sila djeluje u točki $x_A = \frac{\ell}{3}$, čvorne sile su jednake

$$\mathbf{F}_S = F_{Ax}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \tag{12.8}$$



Slika 12.2. Opterećenje koncentriranom silom

Lako je provjeriti da su čvorne sile (12.5), (12.6) i (12.8) po apsolutnoj vrijednosti jednake reaktivnim silama kad je štap na oba kraja uklješten [3].

Kad se u elementu pojavljuju početne deformacije koje su najčešće posljedica promjene temperature

$$\varepsilon_0 = \alpha_T \Delta T, \tag{12.9}$$

ekvivalentne sile u čvorovima izračunavaju se pomoću relacije (8.16). Na taj način, na temelju (6.25) i (12.2), za jednodimenzijski konačni element vrijedi relacija

$$\mathbf{F}_{\varepsilon_0} = \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\ell} \\ \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix} [EA][\alpha_T \Delta T] \mathrm{d}x\,, \tag{12.10}$$

pa se nakon integracije dobiva

$$\mathbf{F}_{\varepsilon_0} = EA\alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12.11}$$

Čvorne sile (12.11) također su po apsolutnoj vrijednosti jednake reakcijama u ukliještenom štapu poradi povećanja njegove temperature za iznos ΔT.

Kad su poznati pomaci u čvorovima konačnog elementa, uzdužna sila u elementu izračunava se pomoću konstitutivne jednadžbe koju je uz pretpostavku početnih deformacija moguće transformirati na sljedeći način:

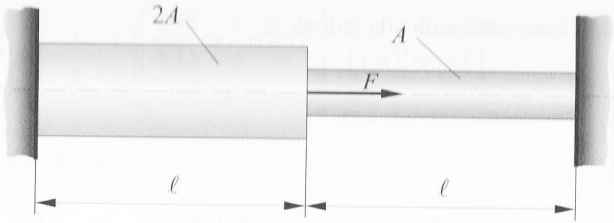
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &\underline{\qquad\qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\mathbf{v} \qquad\qquad} \\ &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DB}\,\mathbf{v} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Na temelju (3.65) te izraza za $\mathbf{B}$, $\mathbf{v}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, relacija za izračunavanje uzdužne sile može se napisati u obliku

$$[N] = [EA]\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - [EA][\alpha_T \Delta T] \tag{12.13}$$

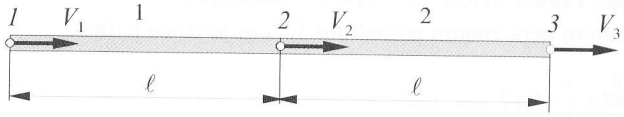
koji pokazuje da osnovni štapni element može opisati samo konstantnu uzdužnu silu. Na taj način, ako je osno opterećenje štapa takvo da uvjetuje promjenjivu uzdužnu silu, za približavanje točnom rješenju bit će potrebno štap podijeliti u više osnovnih elemenata. Primjena osnovnoga štapnog elementa za rješavanje problema osnog opterećenja prikazat će se u sljedeća dva jednostavna primjera koji će također pridonijeti razumijevanju metode konačnih elemenata.

Primjer 12.1. Štap promjenjiva poprečnog presjeka ukliješten na oba kraja opterećen je silom F prema slici P12.1.1. Potrebno je izračunati uzdužnu silu koja je posljedica zadanog opterećenja i promjene temperature štapa za iznos ΔT. Zadano: F, ℓ, A, E, α_T.



Slika P12.1.1. Osno opterećeni štap promjenjiva poprečnog presjeka

Proračunski model, slika P12.1.2., sastoji se od dva osnovna štapna elementa 1 i 2 različitih poprečnih presjeka. Poprečni presjek elementa 1 je $2A$, a element 2 ima poprečni presjek jednak A.



Slika P12.1.2. Proračunski model

Vektor je globalnih stupnjeva slobode

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}. \tag{a}$$

Globalni stupnjevi slobode		*1*	*2*	*3*
Stupnjevi slobode elemenata	1	*1*	*2*	
	2		*1*	*2*

Tablica P12.1. Lokalni i globalni stupnjevi slobode

Na temelju tablice P12.1. i izraza za matricu krutosti (12.3), na način koji je opisan u odjeljku 8.2.3., izvodi se globalna matrica krutosti

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{b}$$

Pomoću relacije (12.11), čvorne sile poradi promjene temperature izračunavaju se za pojedine elemente. Na temelju podataka iz tablice P12.1., globalni je vektor sila

$$\mathbf{R}_{\varepsilon_0} = AE\alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{c}$$

Vektor vanjskih koncentriranih sila jednak je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{d}$$

Globalna jednadžba konačnih elemenata sada je jednaka

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}: \quad \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = AE\alpha_T \Delta T \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{e}$$

Uključivanjem rubnih uvjeta $V_1 = V_3 = 0$, sustav jednadžbi (e) svodi se na jednu jednadžbu s jednim nepoznatim pomakom V_2 čiji je iznos jednak

$$V_2 = \frac{F\ell}{3AE} + \frac{\ell}{3}\alpha_T \Delta T. \tag{f}$$

Nakon povratnog izjednačivanja na temelju tablice P12.1., određuju se vektori pomaka pojedinih elemenata. Na taj način stupnjevi slobode elementa 1 jednaki su

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F\ell}{3AE} + \dfrac{\ell}{3}\alpha_T \Delta T \end{bmatrix}, \tag{g}$$

a za element 2 vrijedi

$$\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{F\ell}{3AE} + \dfrac{\ell}{3}\alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{h}$$

Uzdužne sile izračunavaju se pomoću jednadžbe (12.13). Za element 1 uzdužna sila jednaka je

$$[N] = [E2A]\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\ell} & \dfrac{1}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{F\ell}{3AE} + \dfrac{\ell}{3}\alpha_T \Delta T \end{bmatrix} - [E2A][\alpha_T \Delta T], \tag{i}$$

te se nakon sređivanja izraza dobiva

$$N = \frac{2}{3}F - \frac{4}{3}AE\alpha_T \Delta T. \tag{j}$$

Analogno za element 2 vrijedi relacija

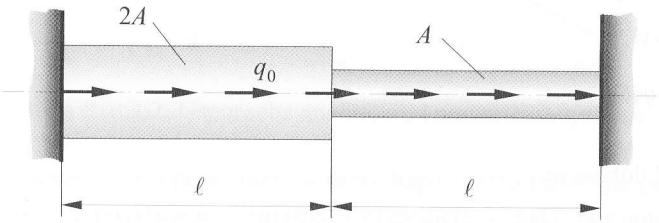
$$[N]=[EA]\left[-\frac{1}{\ell}\quad\frac{1}{\ell}\right]\left[\begin{matrix}\frac{F\ell}{3AE}+\frac{\ell}{3}\alpha_T\Delta T\\ 0\end{matrix}\right]-[EA][\alpha_T\Delta T] \tag{k}$$

iz koje slijedi uzdužna sila

$$N=-\frac{1}{3}F-\frac{4}{3}AE\alpha_T\Delta T\,. \tag{l}$$

Nije teško provjeriti da su izračunate vrijednosti uzdužne sile (j) i (l) jednake vrijednostima koje se dobivaju pomoću relacija u mehanici deformabilnih tijela [3]. Razlog jednakim rješenjima je činjenica da linearna funkcija pomaka u osnovnom štapnom elementu točno opisuje stvarnu raspodjelu pomaka.

Primjer 12.2. Za štap promjenjiva poprečnog presjeka koji je razmatran u prethodnom primjeru potrebno je izračunati uzdužnu silu ako je opterećenje po duljini štapa jednoliko kontinuirano $q_x(x)=q_0$. Zadano: q_0, ℓ, A, E.



Slika P12.2.1. Štap promjenjiva presjeka opterećen jednoliko kontinuirano

Proračunski model jednak je kao i u prethodnom primjeru pa je na taj način vektor globalnih stupnjeva slobode jednak. Tablica P12.1., koja povezuje lokalne i globalne stupnjeve slobode, također je nepromijenjena. Budući da su zadržane iste dimenzije proračunskog modela, globalna matrica krutosti jednaka je relaciji (b) iz prethodnog primjera.

Pomoću relacije (12.5) i podataka u navedenoj tablici, izračunava se globalni vektor zbog površinskog jednoliko kontinuiranog opterećenja

$$\mathbf{R}_S=q_0\ell\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}. \tag{a}$$

Globalna jednadžba konačnih elemenata jednaka je

$$\mathbf{KV}=\mathbf{R}: \quad \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = q_0\ell\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{b}$$

Uz iste rubne uvjete kao i u prethodnom primjeru, izračunava se nepoznati pomak V_2

$$V_2 = \frac{q_0\ell^2}{3AE}. \tag{c}$$

Stupnjevi slobode elemenata 1 i 2, $\mathbf{v}^1$ i $\mathbf{v}^2$ jednaki su

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_0\ell^2}{3AE} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} \frac{q_0\ell^2}{3AE} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{d}$$

Na isti način kao i u prethodnom primjeru, pomoću relacije (12.13), uz uvjet da je promjena temperature $\Delta T = 0$, izračunavaju se uzdužne sile. Za štap 1 uzdužna sila jednaka je

$$N = \frac{2}{3}q_0\ell, \tag{e}$$

a u štapu 2 dobiva se

$$N = -\frac{1}{3}q_0\ell. \tag{f}$$

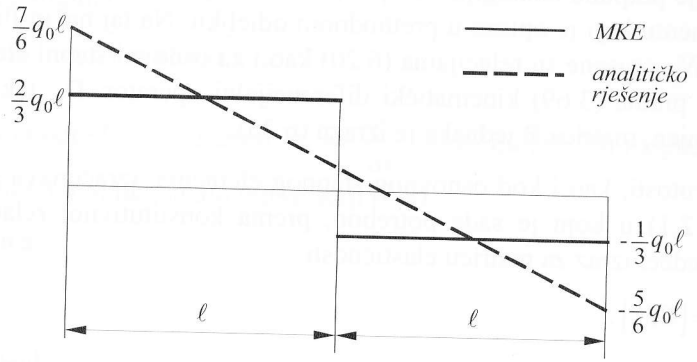
Reakcije u uklještenju štapa, a na taj način i raspodjelu uzdužne sile, moguće je jednostavno izračunati primjenom analitičkih relacija u mehanici deformabilnih tijela [3]. Reakcija na lijevom kraju štapa jednaka je $F_\ell = \frac{7}{6}q_0\ell$, a na desnom kraju izračunava se vrijednost $F_d = -\frac{5}{6}q_0\ell$. Budući da duž štapa djeluje jednoliko kontinuirano opterećenje q_0, lako je zaključiti da se uzdužna sila linearno mijenja po duljini od vrijednosti F_ℓ na lijevom kraju štapa do iznosa F_d na njegovu desnom kraju. Na taj način raspodjela uzdužne sile može se opisati sljedećom linearnom funkcijom:

$$N(x) = \frac{7}{6}q_0\ell - q_0x. \tag{g}$$

Nije teško zaključiti da se pojavljuju znatne razlike u vrijednostima dobivenim pomoću metode konačnih elemenata i primjenom teorijskih izraza u mehanici defor-

mabilnih tijela. Tome je razlog što je osnovnim konačnim elementima moguće opisati samo linearnu raspodjelu pomaka i konstantnu uzdužnu silu, a u štapu koji je opterećen jednoliko kontinuirano pomak se mijenja po paraboli drugog reda i uzdužna sila je linearna. Iz toga slijedi da je za približavanje točnom rješenju potrebno povećati broj konačnih elemenata kako bi bilo moguće što bolje opisati nelinearnu raspodjelu pomaka.

U cilju usporedbe rezultata, na slici P12.2.2 je prikazana raspodjela uzdužnih sila dobivenih numerički pomoću metode konačnih elemenata i pomoću analitičkih izraza u mehanici deformabilnih tijela.



Slika P12.2.2. Usporedba analitičkih i numeričkih rješenja

Iako se vrijednosti sila u pojedinim točkama štapa znatno razlikuju, potrebno je uočiti da su ukupne površine u dijagramima raspodjele jednake za numeričko i analitičko rješenje. To upućuje na činjenicu da uvjeti ravnoteže nisu zadovoljeni u svakoj pojedinoj točki štapa, ali su zadovoljeni u prosječnom smislu kad se razmatra cijela konstrukcija. To je također pokazano i na primjeru konzolnog nosača u odjeljku 5.1.

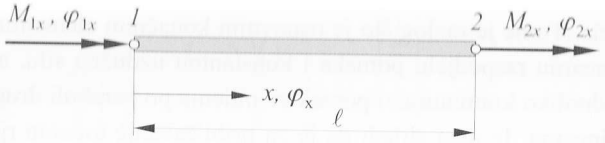
12.2. Štapni element opterećen na uvijanje

Stupnjevi slobode štapnoga konačnog elementa za rješavanje problema uvijanja kutovi su zakreta oko uzdužne osi x, a njima su pridruženi momenti uvijanja. Za štapni element s dva čvora prema slici 12.3., vektor je stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{2x} \end{bmatrix}, \tag{12.14}$$

a komponente vektora $\mathbf{F}$ jednake su momentima uvijanja

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} M_{1x} & M_{2x} \end{bmatrix}. \tag{12.15}$$



Slika 12.3. Štapni element za rješavanje problema uvijanja

Raspodjela kuta zakreta duž elementa opisana je linearnom funkcijom

$$\varphi_x = a_1 + a_2 x, \tag{12.16}$$

što pokazuje potpunu analogiju s raspodjelom osnoga pomaka u osnovnom štapnom elementu koji je opisan u prethodnom odjeljku. Na taj način funkcije oblika N_1 i N_2 opisane su relacijama (6.20) kao i za osnovni štapni element. Budući da je prema (3.69) kinematički diferencijalni operator $\mathbf{D}_k$ također ostao nepromijenjen, matrica **B** jednaka je izrazu (6.25).

Matrica krutosti, kao i kod osnovnog štapnog elementa, izračunava se pomoću relacije (12.1) u koju je sada potrebno, prema konstitutivnoj relaciji (3.70), uvrstiti sljedeći izraz za matricu elastičnosti

$$\mathbf{D} = \left[GI_T \right], \tag{12.17}$$

gdje je G modul smicanja, a I_T je torzijski moment tromosti poprečnog presjeka štapa. Nakon integriranja, dobiva se matrica krutosti u obliku

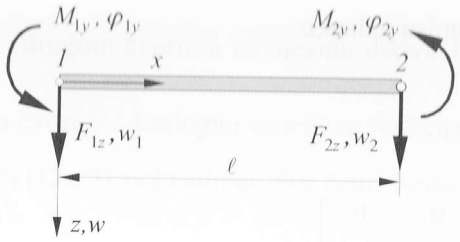
$$\mathbf{k} = \frac{GI_T}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{12.18}$$

koji se od relacije (12.3) razlikuje samo po tome što je osna krutost zamijenjena torzijskom krutošću. Sile u čvorovima poradi opterećenja po duljini elementa određuju se pomoću relacije (8.18) na način koji je analogan postupku izračunavanja koji je opisan u prethodnom odjeljku. Pritom je osno opterećenje u vektoru $\mathbf{q}_b$ zamijenjeno momentom uvijanja.

12.3. Osnovni gredni element

Najjednostavniji jednodimenzijski element za rješavanje problema savijanja osnovni je gredni element s dva čvora, prema slici 12.4. Stupnjevi slobode pomaci su i kutovi zakreta

$$\mathbf{v}^T = \left[w_1 \quad \varphi_{1y} \quad w_2 \quad \varphi_{2y} \right]. \tag{12.19}$$



Slika 12.4. Osnovni gredni element

Raspodjela poprečnog pomaka duž osi x opisana je jednodimenzijskim polinomom trećeg stupnja

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3, \tag{12.20}$$

a kut zakreta određen je izrazom $\varphi_y = -\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$. Relaciju (12.20) moguće je prikazati u matričnom obliku analogno relaciji (6.8)

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}, \tag{12.21}$$

gdje je

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}, \tag{12.22}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}, \tag{12.23}$$

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}. \tag{12.24}$$

Za prikazani gredni element potrebno je zadovoljiti sljedeće uvjete u čvorovima na lijevom i desnom kraju elementa:

$$\begin{aligned} &\text{za } x = 0 \text{ (čvor 1)}, w = w_1 \text{ i } \varphi = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \varphi_{1y}, \\ &\text{za } x = \ell \text{ (čvor 2)}, w = w_2 \text{ i } \varphi = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \varphi_{2y}. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Pomoću (12.20) i (12.25) stupnjeve slobode moguće je eksplicitno prikazati

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1, \\ \varphi_{1y} &= -a_2, \\ w_2 &= a_1 + a_2\ell + a_3\ell^2 + a_4\ell^3, \\ \varphi_{2y} &= -a_2 - 2a_3\ell - 3a_4\ell^2, \end{aligned} \tag{12.26}$$

što je u matričnom zapisu jednako

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{a}\,, \tag{12.27}$$

gdje je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & -1 & -2\ell & -3\ell^2 \end{bmatrix}. \tag{12.28}$$

Analogno postupku koji je opisan u 6. poglavlju, matrica funkcija oblika **N** određuje se pomoću sljedećih relacija:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{a} \\ &\underline{\qquad \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v} \qquad} \\ &\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Uvrštavanjem (12.23) i (12.28) u izraz za matricu funkcija oblika, nakon izračunavanja se dobiva

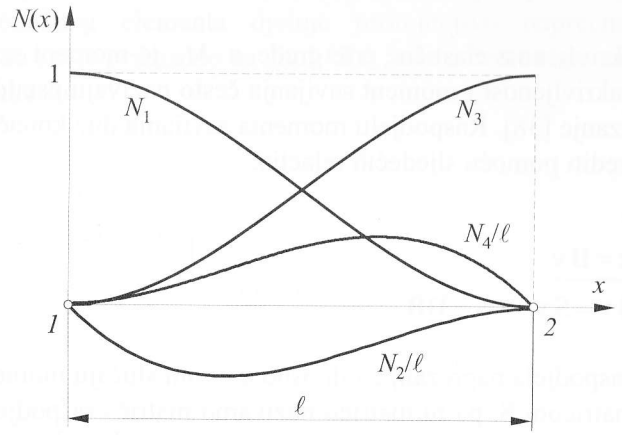
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}, \tag{12.30}$$

gdje su funkcije oblika jednake

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}\,, \\ N_2 &= -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}\,, \\ N_3 &= \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}\,, \\ N_4 &= \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}\,. \end{aligned} \tag{12.31}$$

Funkcije N_1 i N_3 pridružene su pomacima w_1 i w_2, a N_2 i N_4 kutovima zakreta φ_{1y} i φ_{2y}. Nije teško provjeriti da je $N_1 = 1$ u čvoru *1*, $N_1 = 0$ u čvoru *2*, a njezine derivacije $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x}$ u oba čvora jednake su nuli. Funkcija oblika N_2 jedna-

ka je nuli u jednom i drugom čvoru, a za njezinu derivaciju vrijedi $\frac{dN_2}{dx} = 1$ u čvoru *1*, a $\frac{dN_2}{dx} = 0$ u čvoru *2*. Analogno vrijedi za funkcije N_3 i N_4. To pokazuje da su rubni uvjeti (12.25) zadovoljeni. Sve četiri funkcije oblika grafički su prikazane na slici 12.5.



Slika 12.5. Funkcije oblika osnovnoga grednog elementa

Ovdje prikazane funkcije oblika moguće je izvesti na neposredan način primjenom Hermiteove interpolacije koja je razmatrana u prethodnom poglavlju. Funkcije oblika N_1 i N_3 jednake su Hermiteovim polinomima H_{01}^1 i H_{02}^1 u relacijama (11.15) i (11.16), dok se funkcije N_2 i N_4 od Hermiteovih polinoma H_{11}^1 i H_{12}^1 razlikuju samo u predznaku. Te razlike su nastale zbog različitoga definiranja kuta zakreta. Prednost Hermiteove interpolacije za izvođenje funkcija oblika dolazi znatno više do izražaja kod elemenata s većim brojem stupnjeva slobode.

Za izračunavanje matrice krutosti potrebno je odrediti matricu $\mathbf{B}$ koja se izračunava pomoću relacije $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}$, koja je također izvedena u 6. poglavlju. Prema (3.76) diferencijalni operator za rješavanje problema savijanja grede jednak je

$$\mathbf{D}_k = \left[-\frac{d^2}{dx^2} \right], \tag{12.32}$$

pa je matrica $\mathbf{B}$ jednaka

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{d^2}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}. \tag{12.33}$$

Deriviranjem funkcija oblika dobiva se

$$\mathbf{B}=\left[\left(\frac{6}{\ell^2}-\frac{12x}{\ell^3}\right)\ \left(-\frac{4}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)\ \left(-\frac{6}{\ell^2}+\frac{12x}{\ell^3}\right)\ \left(-\frac{2}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)\right]. \tag{12.34}$$

Kao što je navedeno u odjeljku 3.4.3., vektori $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\sigma}$ za rješavanje problema savijanja jednaki su

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\kappa_y\right],\quad \boldsymbol{\sigma}=\left[M_y\right], \tag{12.35}$$

gdje je κ_y zakrivljenost elastične crte grede, a M_y je moment savijanja. To je razlog da se zakrivljenost i moment savijanja često nazivaju pseudodeformacija i pseudonaprezanje [38]. Raspodjelu momenta savijanja duž konačnog elementa moguće je odrediti pomoću sljedećih relacija:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ &\underline{\qquad\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\mathbf{v}}\\ &\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{v}=\mathbf{S}\,\mathbf{v}\rightarrow\mathbf{S}=\mathbf{D}\mathbf{B}.\end{aligned} \tag{12.36}$$

Na taj način raspodjela naprezanja, odnosno u ovom slučaju momenta savijanja, određena je matricom **S**, pa tu matricu nazivamo matrica raspodjele naprezanja ili pseudonaprezanja. Budući da je prema (3.77) $\mathbf{D}=\left[EI_y\right]$, pomoću (12.34) matrica **S** je jednaka

$$\mathbf{S}=EI_y\left[\left(\frac{6}{\ell^2}-\frac{12x}{\ell^3}\right)\ \left(-\frac{4}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)\ \left(-\frac{6}{\ell^2}+\frac{12x}{\ell^3}\right)\ \left(-\frac{2}{\ell}+\frac{6x}{\ell^2}\right)\right] \tag{12.37}$$

što pokazuje da je raspodjela momenta savijanja duž grednog elementa linearna.

Matrica krutosti izračunava se pomoću iste relacije kao i za osnovni štapni element. Uvrštavanjem (12.34) te izraza za **D** u relaciju (12.1), nakon provedenog množenja matrica i integriranja, dobiva se matrica krutosti u obliku

$$\mathbf{k}=EI_y\begin{bmatrix}\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2}\\ -\frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell}\\ -\frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2}\\ -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell}\end{bmatrix}. \tag{12.38}$$

Lako je zaključiti da je matrica krutosti kvadratna i simetrična matrica, a njezin red jednak je ukupnom broju stupnjeva slobode konačnog elementa. Njezini

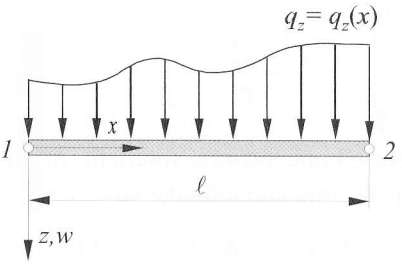
članovi ovise o modulu elastičnosti materijala i geometrijskim veličinama konačnog elementa.

Sile i momenti savijanja u čvorovima, koji su pridruženi stupnjevima slobode elementa, članovi su vektora koncentriranih sila $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} F_{1z} & M_{1y} & F_{2z} & M_{2y} \end{bmatrix}. \tag{12.39}$$

Ako duž konačnog elementa djeluje promjenjivo poprečno opterećenje $q_z = q_z(x)$, kao što je prikazano na slici 12.6., sile u čvorovima analogno relaciji (12.4) jednake su

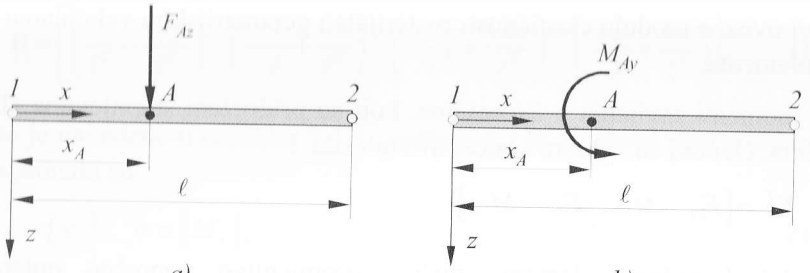
$$\mathbf{F}_S = \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{3x^2}{\ell^2} + \dfrac{2x^3}{\ell^3} \\ -x + \dfrac{2x^2}{\ell} - \dfrac{x^3}{\ell^2} \\ \dfrac{3x^2}{\ell^2} - \dfrac{2x^3}{\ell^3} \\ \dfrac{x^2}{\ell} - \dfrac{x^3}{\ell^2} \end{bmatrix} \left[q_z(x) \right] \mathrm{d}x \,. \tag{12.40}$$



Slika 12.6. Kontinuirano poprečno opterećenje

U specijalnom slučaju kad je kontinuirano opterećenje konstantno, tj. $q_z(x) = q_0$, pomoću (12.40) izračunavaju se ekvivalentne sile u čvorovima

$$\mathbf{F}_S^T = q_0 \ell \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{\ell}{12} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\ell}{12} \right]. \tag{12.41}$$



Slika 12.7. Koncentrirano opterećenje između čvorova:
a) koncentrirana sila, b) koncentrirani moment

Ako između čvorova elementa na mjestu koje je određeno koordinatom x_A djeluje poprečna koncentrirana sila, na primjer F_{Az} prema slici 12.7a, sile u čvorovima izračunavaju se analogno relaciji (12.7) pomoću sljedećeg izraza:

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{N}^T(x_A)F_{Az} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{3x_A^2}{\ell^2}+\dfrac{2x_A^3}{\ell^3} \\ -x_A+\dfrac{2x_A^2}{\ell}-\dfrac{x_A^3}{\ell^2} \\ \dfrac{3x_A^2}{\ell^2}-\dfrac{2x_A^3}{\ell^3} \\ \dfrac{x_A^2}{\ell}-\dfrac{x_A^3}{\ell^2} \end{bmatrix} F_{Az}\,. \tag{12.42}$$

Kad u položaju x_A djeluje koncentrirani moment M_{Ay}, kao što je prikazano na slici 12.7b, ekvivalentne čvorne sile jednake su

$$\mathbf{F}_S = -\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}\right|_{x_A} M_{Ay} = \begin{bmatrix} \dfrac{6x_A}{\ell^2}-\dfrac{6x_A^2}{\ell^3} \\ 1-\dfrac{4x_A}{\ell}+\dfrac{3x_A^2}{\ell^2} \\ -\dfrac{6x_A}{\ell^2}+\dfrac{6x_A^2}{\ell^3} \\ -\dfrac{2x_A}{\ell}+\dfrac{3x_A^2}{\ell^2} \end{bmatrix} M_{Ay}\,. \tag{12.43}$$

Ako spomenuto koncentrirano opterećenje djeluje na polovini elementa, tj. $x_A = \dfrac{\ell}{2}$, u slučaju koncentrirane sile, na temelju (12.42) čvorne sile jednake su

$$\mathbf{F}_S^T = F_{Az}\left[\frac{1}{2} \quad -\frac{\ell}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\ell}{8}\right]. \tag{12.44}$$

Kada djeluje koncentrirani moment, pomoću (12.43) izračunava se

$$\mathbf{F}_S^T = M_{Ay}\left[\frac{3}{2\ell} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{3}{2\ell} \quad -\frac{1}{4}\right]. \tag{12.45}$$

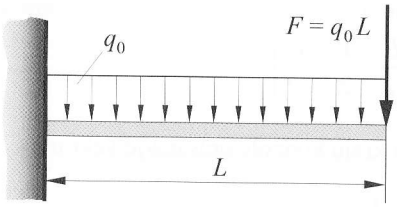
Nije teško provjeriti da su čvorne sile i momenti u izrazima (12.41), (12.44) i (12.45) po apsolutnoj vrijednosti jednaki reaktivnim silama i momentima kad je greda duljine ℓ na oba kraja ukliještena [5].

Primjer 12.3. Za konzolni nosač konstantne fleksijske krutosti EI_y, zadan i opterećen prema slici P12.3.1., potrebno je primjenom osnovnoga grednoga konačnog elementa odrediti raspodjelu momenta savijanja duž nosača. Pritom je potrebno:

a) primijeniti jedan element,

b) primijeniti dva elementa jednake duljine $\ell = \frac{L}{2}$.

Zadano: q_0, $F = q_0 L$, EI_y, L.

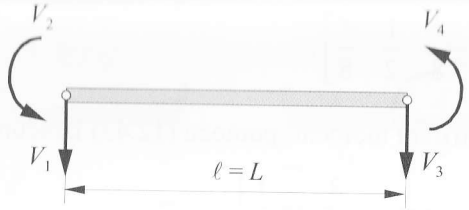


Slika P12.3.1. Konzolni nosač

a) Jedan konačni element

Proračunski model, slika P12.3.2., sastoji se od jednog elementa i pripadna četiri stupnja slobode. Zbog jednostavnosti, stupnjevi slobode označit će se brojevima 1 do 4. Budući da je konzolni nosač modeliran samo jednim elementom, vrijedi $\mathbf{V} = \mathbf{v}$, pa slijedi

$$\mathbf{V}^T = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]. \tag{a}$$



Slika P12.3.2. Proračunski model

Za matricu krutosti također vrijedi $\mathbf{K} = \mathbf{k}$. Uvrštavanjem $\ell = L$ u (12.38), dobiva se sljedeći izraz za matricu $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = E I_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}. \tag{b}$$

Sile u čvorovima poradi jednoliko kontinuiranog opterećenja prema (12.41) jednake su

$$\mathbf{R}_S^T = q_0 L \left[\frac{1}{2} \quad -\frac{L}{12} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{L}{12} \right], \tag{c}$$

a koncentrirana sila na kraju konzole opisana je vektorom

$$\mathbf{Q}^T = [0 \quad 0 \quad q_0 L \quad 0]. \tag{d}$$

Primjenom rubnih uvjeta $V_1 = V_2 = 0$, sustav jednadžbi $\mathbf{K}\,\mathbf{V} = \mathbf{R}_S + \mathbf{Q}$ transformira se u sljedeće dvije jednadžbe s dvije nepoznate veličine V_3 i V_4

$$EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = q_0 L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{L}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 L \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{e}$$

čija rješenja su jednaka

$$V_3 = \frac{11}{24} \frac{q_0 L^4}{EI_y}, \quad V_4 = -\frac{2}{3} \frac{q_0 L^3}{EI_y}. \tag{f}$$

Vektor stupnjeva slobode sada se može napisati u obliku

$$\mathbf{V}^T = \left[0 \quad 0 \quad \frac{11}{24}\frac{q_0 L^4}{EI_y} \quad -\frac{2}{3}\frac{q_0 L^3}{EI_y} \right]. \tag{g}$$

Nije teško zaključiti da je iznos za V_3 jednak progibu, a V_4 je kut zakreta na desnom kraju konzolnog nosača. Raspodjela momenta savijanja određuje se pomoću izraza $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\,\mathbf{v}$. Budući da je $\mathbf{v} = \mathbf{V}$, na temelju (12.35) i (12.37) dobiva se sljedeća matrična relacija:

$$\left[M_y\right] = EI_y \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24}\frac{q_0 L^4}{EI_y} \\ -\frac{2}{3}\frac{q_0 L^3}{EI_y} \end{bmatrix} \tag{h}$$

Nakon množenja, dobiva se linearna funkcija koja opisuje raspodjelu momenta savijanja duž konzolnog nosača

$$M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{12}\left(17 - 18\frac{x}{L}\right). \tag{i}$$

Za $x = 0$ izračunava se moment savijanja u uklještenju konzole

$$M_y(0) = -\frac{17}{12} q_0 L^2, \tag{j}$$

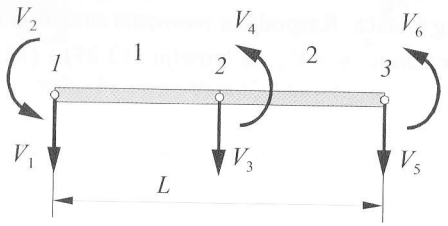
a za $x = L$ moment je savijanja na desnom kraju konzole

$$M_y(L) = \frac{1}{12} q_0 L^2. \tag{k}$$

Nije teško provjeriti da su iste vrijednosti momenta savijanja dobivene u 5. poglavlju u primjerima 5.1. i 5.2., gdje je isti problem riješen pomoću metode težinskog reziduala i Rayleigh-Ritzove metode. To je lako objasniti činjenicom da je metoda konačnih elemenata teorijski usko povezana sa spomenute dvije metode, a isti rezultati slijede iz iste raspodjele pomaka. Ako je konzolni nosač modeliran samo s jednim osnovnim grednim elementom, onda je raspodjela pomaka duž konzolnoga nosača jednaka odabranoj funkciji pomaka u primjerima 5.1. i 5.2. Odstupanja na taj način izračunatih vrijednosti od točnih rezultata dobivenih primjenom teorijskih rješenja u mehanici deformabilnih tijela, raspravljena su u 5. poglavlju. Bolja rješenja će se postići ako se jedan element zamijeni s dva osnovna gredna elementa, što je pokazno u drugom dijelu ovoga primjera.

b) Dva elementa jednake duljine

Ako se konzolni nosač podijeli na dva elementa, proračunski model ima ukupno 6 stupnjeva slobode, prema slici P12.3.3.



Slika P12.3.3. Proračunski model

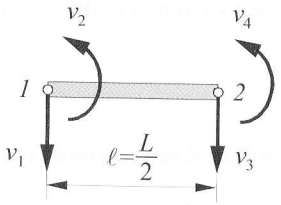
Na taj način, vektor je globalnih stupnjeva slobode

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{bmatrix}. \tag{a}$$

Stupnjevi slobode jednog elementa, koji su prema (12.19) jednaki

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}, \tag{b}$$

prikazani su na slici P12.3.4.



Slika P12.3.4. Osnovni gredni konačni element

Na temelju prikazanoga proračunskog modela, stupnjevi slobode elemenata poduda-raju se s globalnim stupnjevima slobode prema tablici P12.3.

Globalni stupnjevi slobode		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Stupnjevi slobode elemenata	1	*1*	*2*	*3*	*4*		
	2			*1*	*2*	*3*	*4*

Tablica P12.3. Lokalni i globalni stupnjevi slobode

Prema podacima iz tablice i pomoću izraza za matricu krutosti osnovnoga grednog elementa (12.38), uz supstituciju $\ell = \frac{L}{2}$, izračunava se globalna matrica krutosti

$$\mathbf{K} = EI_y \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix}. \tag{c}$$

Na temelju (12.41) dobiva se globalni vektor zbog površinskog jednoliko kontinuiranog opterećenja

$$\mathbf{R}_S^T = q_0 L \left[\frac{1}{4} \quad -\frac{L}{48} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{L}{48} \right]. \tag{d}$$

Globalni je vektor poradi koncentrirane sile na kraju konzole

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_0 L & 0 \end{bmatrix}. \tag{e}$$

Nakon postavljanja rubnih uvjeta $V_1 = V_2 = 0$, jednadžba konačnih elemenata $\mathbf{K}\,\mathbf{V} = \mathbf{R}_S + \mathbf{Q}$ za problem savijanja konzole svodi se na sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice

$$EI_y \begin{bmatrix} \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = q_0 L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{L}{48} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 L \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{f}$$

Rješenje ovoga sustava jednadžbi jednako je

$$\mathbf{V}^T = \frac{q_0 L^3}{EI_y} \left[\frac{19}{128} L \quad -\frac{25}{48} \quad \frac{11}{24} L \quad -\frac{2}{3} \right]. \tag{g}$$

Povratnim izjednačivanjem globalnih i lokalnih stupnjeva slobode dobivaju se vektori stupnjeva slobode pojedinih elemenata. Za element označen brojem 1 u proračunskom modelu, vektor $\mathbf{v}$ jednak je

$$\mathbf{v}^T = \frac{q_0 L^3}{EI_y}\left[0 \quad 0 \quad \frac{19}{128}L \quad -\frac{25}{48}\right]. \tag{h}$$

Za element 2 vrijedi

$$\mathbf{v}^T = \frac{q_0 L^3}{EI_y}\left[\frac{19}{128}L \quad -\frac{25}{48} \quad \frac{11}{24}L \quad -\frac{2}{3}\right]. \tag{i}$$

Budući da su elementi 1 i 2 jednake duljine $\ell = \frac{L}{2}$, matrica $\mathbf{S}$ za oba elementa je jednaka i iznosi

$$\mathbf{S} = EI_y\left[\left(\frac{24}{L^2}-\frac{96x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{8}{L}+\frac{24x}{L^2}\right) \quad \left(-\frac{24}{L^2}+\frac{96x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L}+\frac{24x}{L^2}\right)\right]. \tag{j}$$

Pomoću relacije $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\,\mathbf{v}$ izračunava se raspodjela momenta savijanja duž elementa 1

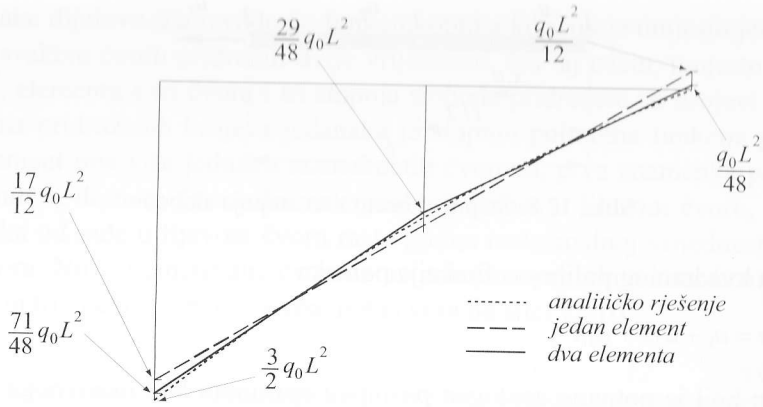
$$M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{48}\left(71 - 84\frac{x}{L}\right). \tag{k}$$

Za čvor *1* izračunava se $M_y(0) = -\frac{71}{48}q_0 L^2$, a u čvoru *2* dobiva se $M_y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{29}{48}q_0 L^2$. Analogno se izračunava raspodjela momenta savijanja duž elementa 2

$$M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{48}\left(29 - 60\frac{x}{L}\right), \tag{l}$$

gdje je za čvor *1*, $M_y(0) = -\frac{29}{48}q_0 L^2$, a uvrštavanjem $x = \frac{L}{2}$, za čvor *2* izračunava se $M_y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{48}q_0 L^2$. Lako je uočiti da je $M_y\left(\frac{L}{2}\right)$ za element 1 jednak $M_y(0)$ za element 2, što pokazuje kontinuitet momenta savijanja na spoju dvaju elemenata. U općem slučaju za proizvoljno opterećenje elemenata te vrijednosti mogu biti različite.

Raspodjela momenta savijanja duž konzolnog nosača dobivena pomoću jednog i pomoću dva konačna elementa grafički je prikazana u usporedbi s analitičkim rješenjem na slici P12.3.5.



Slika P12.3.5. Usporedba raspodjele momenta savijanja dobivena pomoću metode konačnih elemenata s analitičkim rješenjem

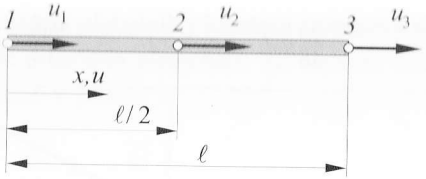
Nije teško uočiti da su manja odstupanja od točnoga analitičkog rješenja u proračunu s dva elementa. Približavanje točnom rješenju, uz povećanje broja elemenata, moguće je postići primjenom elemenata za koje je funkcija pomaka opisana polinomima višeg stupnja. Takvi elementi često se nazivaju elementi višeg reda.

12.4. Jednodimenzijski elementi višeg reda

U prethodnom izlaganju pokazano je da interpolacijske funkcije u osnovnim jednodimenzijskim elementima samo približno mogu opisati raspodjelu pomaka ako su elementi opterećeni kontinuirano po duljini. U tom slučaju, u svrhu približavanja točnom rješenju, potrebno je povećati stupanj polinoma funkcije pomaka, što zahtijeva povećavanje stupnjeva slobode konačnih elemenata. Elementi s većim brojem stupnjeva slobode od osnovnih elemenata nazivaju se elementi višeg reda. Za rješavanje jednodimenzijskih problema razlikuju se štapni i gredni elementi višeg reda.

12.4.1. Štapni elementi višeg reda

Ako je funkcija pomaka opisana jednodimenzijskim polinomom drugoga stupnja, pripadni konačni element je element višeg reda s tri stupnja slobode. Sastoji se od tri čvora od kojih su dva na krajevima, a treći raspolavlja duljinu elementa, slika 12.8.



Slika 12.8. Štapni element s tri stupnja slobode

Pomoću kvadratnog polinoma funkcije pomaka

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 , \tag{12.46}$$

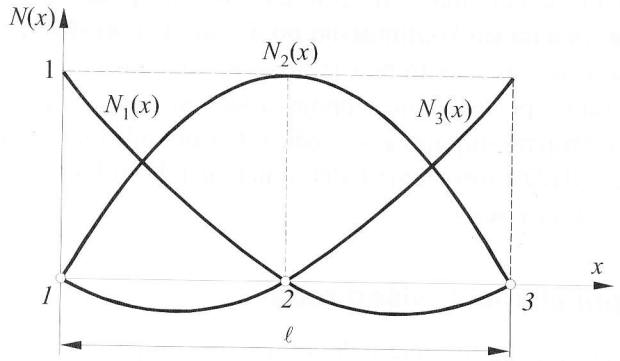
na način koji je potpuno analogan postupku opisanom kod osnovnoga štapnog elementa, izvode se sljedeće funkcije oblika:

$$N_1(x) = 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right) + 1,$$

$$N_2(x) = -\frac{4x}{\ell}\left(\frac{x}{\ell} - 1\right), \tag{12.47}$$

$$N_3(x) = \frac{2x}{\ell}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}\right),$$

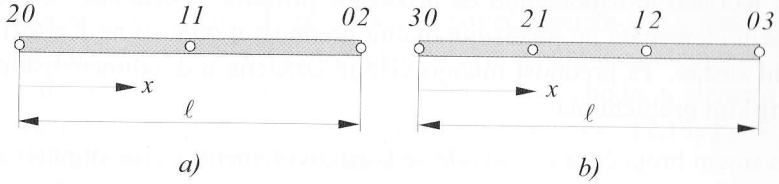
koje su grafički prikazane na slici 12.9.



Slika 12.9. Funkcije oblika štapnoga konačnog elementa s tri stupnja slobode

Funkcije oblika također je moguće izvesti na neposredan način pomoću Lagrangeovih interpolacijskih polinoma opisanih u 11. poglavlju. Osim pomoću spomenutih Lagrangeovih interpolacijskih polinoma, funkcije oblika relativno je jednostavno izvesti u prirodnim koordinatama L_1 i L_2 koje su prikazane u odjeljku 10.1. Pritom je potrebno čvorove postaviti tako da je element podijeljen

na jednake dijelove. Za izvođenje funkcija oblika korisno je umjesto jedne znamenke svakom čvoru pridružiti dvije vrijednosti. Na taj način, umjesto brojeva *1*, *2* i *3*, elementu s tri čvora i tri stupnja slobode pridruženi su brojevi *20*, *11* i *02*. Suma pridruženih brojeva jedanaka je stupnju polinoma funkcije pomaka. Ako element ima više jednako razmaknutih čvorova, prva znamenka povećava se od nule u desnom čvoru do maksimalnog iznosa u lijevom čvoru, a druga znamenka od nule u lijevom čvoru raste prema maksimalnoj vrijednosti u desnom čvoru. Novo numeriranje čvorova uz primjenu prirodnih koordinata prikazano je za tri i četiri jednako razmaknuta čvora na slici 12.10.



Slika 12.10. Numeriranje čvorova uz primjenu prirodnih koordinata:
a) element s tri čvora, b) element s četiri čvora

Funkcije oblika izračunavaju se pomoću sljedećeg izraza:

$$N_{k\ell}(L_1, L_2) = N_k(L_1) N_\ell(L_2), \tag{12.48}$$

gdje je

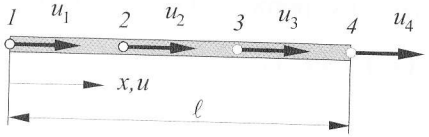
$$N_k(L_1) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} \left(\dfrac{nL_1 - i + 1}{i} \right) & \text{za} \quad k \geq 1 \\ 1 & \text{za} \quad k = 0. \end{cases} \tag{12.49}$$

Analogno vrijedi za $N_\ell(L_2)$. Indeksi k i ℓ jednaki su brojevima kojima su čvorovi numerirani i rastu od nule do maksimalnog iznosa n. Veličina n jednaka je stupnju polinoma koji je moguće jednoznačno provući kroz zadani broj čvorova, što odgovara redu interpolacijske funkcije, tj. vrijedi $n = k + \ell$. Na temelju (12.49) lako je zaključiti da za čvorove $k\ell$ vrijedi $N_k(L_1) = 1$ i $N_\ell(L_2) = 1$, a u svim ostalim čvorovima te funkcije su jednake nuli, što je analogno Lagrangeovim interpolacijskim polinomima prikazanim u odjeljku 11.1. To potvrđuje osnovno svojstvo funkcija oblika: $N_{k\ell}(L_1, L_2) = 1$ u čvoru $k\ell$, dok je u ostalim čvorovima $N_{k\ell}(L_1, L_2) = 0$. Za element s tri čvora, pomoću relacije (12.49) izračunava se $N_0(L_1) = 1$, $N_1(L_1) = 2L_1$, $N_2(L_1) = L_1(2L_1 - 1)$. Analogno se dobiva $N_0(L_2) = 1$, $N_1(L_2) = 2L_2$, $N_2(L_2) = L_2(2L_2 - 1)$. Prema (12.48) funkcije oblika su za element s tri čvora i tri stupnja slobode jednake

$$N_{20}(L_1, L_2) = 2L_1^2 - L_1,$$
$$N_{11}(L_1, L_2) = 4L_1 L_2, \qquad (12.50)$$
$$N_{02}(L_1, L_2) = 2L_2^2 - L_2.$$

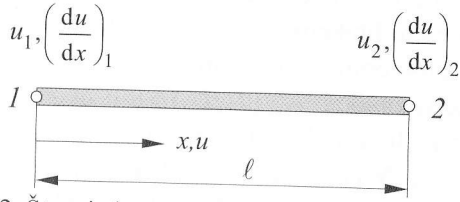
Zamjenom međusobno zavisnih prirodnih koordinata s Kartezijevom koordinatom x korištenjem izraza (10.4), gdje je $x_1 = x_{20} = 0$, a $x_2 = x_{02} = \ell$, relacije (12.50) moguće je transformirati u izraze koji su jednaki funkcijama oblika (12.47). Korisno je napomenuti da prikazane prirodne koordinate kod jednodimenzijskih elemenata ne pokazuju znatnu prednost u odnosu na Kartezijev koordinatni sustav. Ta prednost mnogo više je izražena u dvodimenzijskim i trodimenzijskim problemima.

Povećavanjem broja čvorova izvode se konačni elementi s više stupnjeva slobode. Funkcije oblika izvode se na isti način kao što je opisano kod elementa s tri čvora. Ako je funkcija pomaka parabola trećeg reda, konačni element je s četiri stupnja slobode i četiri čvora, koja su najčešće jednako razmaknuta, slika 12.11.



Slika 12.11. Štapni element s četiri čvora i četiri stupnja slobode

Umjesto povećanja broja čvorova, stupnjeve slobode moguće je povećati uvođenjem derivacija u čvorovima osnovnoga štapnog elementa. Dodavanjem prvih derivacija pomaka u čvorovima na krajevima elementa, izvodi se element s četiri stupnja slobode prema slici 12.12. Pripadna funkcija pomaka isti je polinom trećeg stupnja kao i kod elementa na slici 12.11. Kad su stupnjevi slobode derivacije pomaka, za izvođenje funkcija oblika moguće je primijeniti Hermiteovu interpolaciju koja je opisana u odjeljku 11.2.



Slika 12.12. Štapni element s dva čvora i četiri stupnja slobode

Kad se kod elemenata za koje je potrebno zadovoljiti C^0-kontinuitet u čvorovima izjednačuju derivacije pomaka, pojavljuju se greške ako se derivacije po-

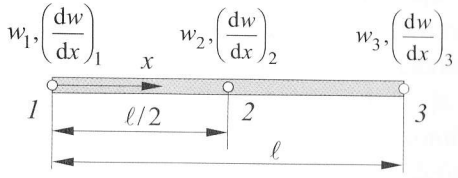
maka, koje su u ovom slučaju duljinske deformacije, ne mijenjaju kontinuirano duž proračunskog modela. Naime, ako u čvorovima djeluju vanjske koncentrirane sile ili se mijenja površina poprečnog presjeka, izjednačivanje prve derivacije pomaka suprotno je fizikalnom stanju u konstrukciji jer na tim mjestima dolazi do skokovite promjene duljinske deformacije.

12.4.2. Gredni elementi višeg reda

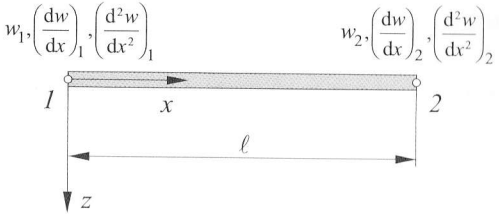
Analogno štapnim konačnim elementima, gredni elementi višeg reda također se mogu izvesti na dva različita načina: povećavanjem broja čvorova uz nepromijenjeni broj stupnjeva slobode po čvoru ili povećavanjem broja stupnjeva slobode dodavanjem derivacija u čvorovima osnovnoga grednog elementa. Na slici 12.13. gredni je element s tri čvora i šest stupnjeva slobode, a element s istim brojem stupnjeva slobode i dva čvora prikazan je na slici 12.14. Funkcija pomaka jednoga i drugog elementa polinom je petog stupnja

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + a_6 x^5 . \tag{12.51}$$

Funkcije oblika izvode se na isti način kao i za osnovni gredni element. Moguće je primijeniti postupak koji je opisan u odjeljku 12.3., pri čemu se polazi od izraza (12.51) ili se funkcije oblika izračunavaju neposredno pomoću Hermiteovih interpolacijskih formula.



Slika 12.13. Gredni element s tri čvora i šest stupnjeva slobode



Slika 12.14. Gredni element s dva čvora i šest stupnjeva slobode

Potrebno je podsjetiti da je prva derivacija poprečnog pomaka w jednaka kutu zakreta, a druga derivacija opisuje zakrivljenost. Za rješavanje problema savijanja potrebno je zadovoljiti C^1-kontinuitet, što znači da je za ispunjavanje uvjeta kompatibilnosti dovoljno u čvorovima izjednačiti prve derivacije pomaka. Izje-

dnačivanjem drugih derivacija pojavljuje se greška ako u čvorovima dolazi do promjene zakrivljenosti; to se događa kad djeluje vanjski koncentrirani moment ili se mijenja poprečni presjek proračunskog modela.

Dodavanjem čvorova s istim brojem stupnjeva slobode ili povećavanjem stupnjeva slobode uvođenjem derivacija višeg reda, moguće je izvesti elemente višeg reda s većim brojem stupnjeva slobode kojima su pridruženi jednodimenzijski polinomi višeg stupnja. Pritom postupak izvođenja funkcija oblika ostaje nepromijenjen. Nije teško zaključiti da je postupak izvođenja matrice krutosti konačnog elementa složeniji što je stupanj polinoma funkcije pomaka veći. Za isti broj stupnjeva slobode proračunskog modela, očekivati je da će približavanje točnom rješenju biti brže kad se primjenjuju elementi višeg reda umjesto osnovnih elemenata. Kad se broj stupnjeva slobode povećava uvođenjem derivacija umjesto povećavanjem broja čvorova, širina pojasa matrice krutosti je manja, što pridonosi brzini rješavanja globalnoga sustava jednadžbi. Osim toga, koncentracija stupnjeva slobode u manjem broju čvorova uvjetuje smanjenje ukupnog broja stupnjeva slobode proračunskog modela. Potrebno je također napomenuti da, uz isti broj stupnjeva slobode proračunskog modela, elementi s višim stupnjem polinoma funkcije pomaka mogu imati matricu krutosti sa širim pojasom od elemenata kojima je stupanj polinoma funkcije pomaka niži.

13. KONAČNI ELEMENTI ZA DVODIMENZIJSKU ANALIZU

Za rješavanje problema ravninskog stanja naprezanja i ravninskog stanja deformacije primjenjuju se dvodimenzijski konačni elementi u kojima je funkcija pomaka najčešće prikazana u Kartezijevu koordinatnom sustavu xy. Za potpuno ispunjavanje uvjeta kompatibilnosti potrebno je duž rubova elemenata zadovoljiti C^0-kontinuitet. Razlikuju se osnovni trokutni i osnovni pravokutni konačni elementi s čvorovima u vrhovima trokuta odnosno pravokutnika, te elementi s većim brojem čvorova. Elementi s većim brojem čvorova, kojima su pridruženi interpolacijski polinomi višeg stupnja, kao i za jednodimenzijske probleme nazivaju se elementi višeg reda. Za izvođenje funkcija oblika u elementima višeg reda često se primjenjuje Lagrangeova interpolacija, pa se ti elementi nazivaju Lagrangeovi konačni elementi. Prikazat će se i tzv. serendipity elementi koji, za razliku od Lagrangeovih konačnih elemenata, ne sadrže čvorove po površini elementa već su im čvorovi smješteni samo duž stranica. Uz prikaz osnovnih relacija za izvođenje matrice krutosti, prikazat će se izračunavanje čvornih sila zbog kontinuiranog opterećenja duž stranica elementa. Sile u čvorovima zbog početnih deformacija koje su posljedica promjene temperature neće se razmatrati. Osim elemenata s ravnim stranicama, za dvodimenzijsku analizu primjenjuju se elementi čije stranice mogu biti zakrivljene te ih je moguće opisati različitim interpolacijskim funkcijama koje mogu biti jednake funkcijama za opisivanje polja pomaka. Takvi elementi nazivaju se izoparametarski elementi, a razmatrat će se u posebnom poglavlju.

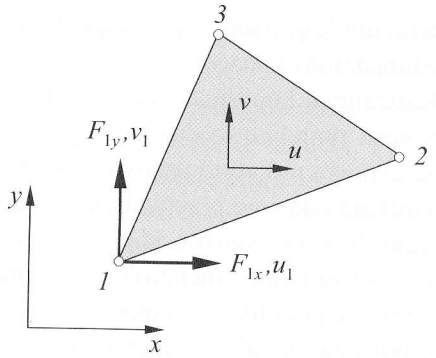
13.1. Osnovni trokutni element

Isto kao i osnovni štapni element, i ovaj element je opisan u 6. poglavlju gdje je prikazano izvođenje matrice krutosti postupkom direktne formulacije konačnih elemenata. Pritom se na neposredan način, naprezanja u elementu preračunavaju u statički ekvivalentne sile u čvorovima, kako bi se nakon toga, pomoću relacija koje povezuju čvorne sile s čvornim pomacima, izračunala matrica krutosti.

Ovdje se primjenjuje varijacijska formulacija konačnih elemenata pa se matrica krutosti izračunava pomoću relacije (8.23). Poradi preglednosti, korisno je tu relaciju još jednom navesti u ovom poglavlju

$$\mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}A \,. \tag{13.1}$$

Za osnovni trokutni element prema slici 13.1., koja je također jednaka slici 6.3., matrica funkcija oblika **N** i matrica **B** izvedene su u 6. poglavlju, a prikazane su relacijama (6.48), (6.49) i (6.56). Osnovne relacije teorije elastičnosti za rješavanje dvodimenzijskih problema, pomoću kojih su izvedene spomenute matrice, navedene su u odjeljcima 3.2. i 3.5.



Slika 13.1. Osnovni trokutni konačni element

Polje pomaka opisano je potpunim linearnim polinomima prema (6.33). Funkcija oblika za čvor *1* grafički je prikazana na slici 6.4., a raspodjela komponente pomaka u pravcu koordinate *x* prikazana je na slici 6.5. Matrica elastičnosti **D** za ravninsko stanje naprezanja na temelju (3.95) jednaka je

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{13.2}$$

Budući da su podintegralne matrice u izrazu za izračunavanje matrice krutosti (13.1) konstantne, nakon integriranja po površini elementa A izraz je jednak

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A \,. \tag{13.3}$$

Uvrštavanjem (6.56) i (13.2) u (13.3) i nakon množenja matrica, izračunava se matrica krutosti koja je potpuno jednaka relaciji (6.61), a ovdje će se još jednom prikazati pomoću submatrica $\mathbf{k}_{ij}$ u obliku

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix}. \tag{13.4}$$

Submatrice su reda 2x2, a korištenjem simbola koji su uvedeni u 6. poglavlju opisuju se jednom relacijom

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{E\,h}{4A\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \beta_i\beta_j + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_i\gamma_j & \nu\,\beta_i\gamma_j + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_i\beta_j \\ \nu\,\gamma_i\beta_j + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_i\gamma_j & \gamma_i\gamma_j + \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_i\beta_j \end{bmatrix}. \tag{13.5}$$

Nije teško zaključiti da vrijedi jednakost $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^T$, što je u skladu s činjenicom da je matrica krutosti simetrična.

Komponente vektora naprezanja za rješavanje dvodimenzijskih problema najčešće su unutarnje sile prikazane u odjeljku 3.5.

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}. \tag{13.6}$$

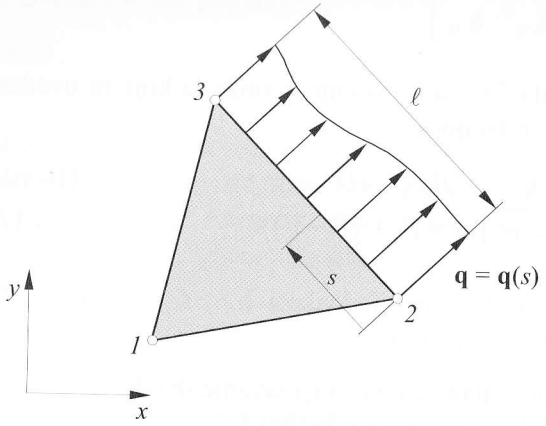
Na taj je način prema (6.62) matrica raspodjele naprezanja $\mathbf{S} = \mathbf{DB}$ jednaka

$$\mathrm{S} = \frac{E\,h}{2A\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} \beta_1 & \nu\gamma_1 & \beta_2 & \nu\gamma_2 & \beta_3 & \nu\gamma_3 \\ \nu\beta_1 & \gamma_1 & \nu\beta_2 & \gamma_2 & \nu\beta_3 & \gamma_3 \\ \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_1 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_1 & \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_2 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_2 & \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_3 & \frac{1}{2}(1-\nu)\beta_3 \end{bmatrix}, \tag{13.7}$$

što pokazuje da je s osnovnim trokutnim elementom moguće opisati samo konstantne unutarnje sile, odnosno na temelju (3.86) i konstantna naprezanja. Lako je zaključiti kako je polje deformacije u elementu također konstantno. U odjeljku 6.2. pokazano je da je kontinuitet pomaka duž zajedničkih rubova susjednih elemenata zadovoljen, što element svrstava u grupu konformnih elemenata. Osim tog uvjeta, također su u potpunosti zadovoljeni i ostali uvjeti za monotonu konvergenciju rješenja.

Dvodimenzijski elementi često su opterećeni u svojoj ravnini kontinuiranim opterećenjem koje djeluje duž stranica elementa. Tako je, osim koncentriranih sila u čvorovima, najčešći slučaj opterećenja trokutnog elementa proizvoljno kontinuirano opterećenje, koje je na slici 13.2. prikazano duž jedne stranice. Kako bi se problem mogao riješiti, potrebno je kontinuirano opterećenje zamijeniti čvornim silama koje se izračunavaju pomoću relacije (8.18). Pritom je elementarna površina na kojoj djeluje opterećenje prema slici 13.2. jednaka $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}s$, gdje je h debljina elementa, a $\mathrm{d}s$ je elementarna duljina. Opterećenje je funkcija lokalne koordinate s, a u općem slučaju ima dvije komponente u pravcu koordinatnih osi x i y

$$\mathbf{q}_b^T(s) = \begin{bmatrix} q_{bx}(s) & q_{by}(s) \end{bmatrix}. \tag{13.8}$$



Slika 13.2. Raspodjela opterećenja duž stranice elementa

Ako je opterećenje raspodijeljeno duž stranice duljine ℓ prema slici 13.2., sile u čvorovima jednake su

$$\mathbf{F}_S = \int_\ell \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b(s) h \, \mathrm{d}s, \tag{13.9}$$

gdje je $\mathbf{N}_S$ matrica funkcija oblika za pomake duž ruba na kojemu djeluje opterećenje, a definirana je u (8.10). Izvodi se iz funkcija koje opisuju raspodjelu pomaka duž opterećenog ruba. Na temelju opisane formulacije osnovnoga trokutnog elementa, nije teško zaključiti da su pomaci linearna funkcija koordinate s na slici 13.2., pa se mogu prikazati u obliku

$$\begin{aligned} u_S &= a_1 + a_2 s, \\ v_S &= a_3 + a_4 s. \end{aligned} \tag{13.10}$$

Na temelju rubnih uvjeta za funkcije pomaka

$$\begin{aligned} s = 0, &\quad u_S = u_2, \quad v_S = v_2, \\ s = \ell, &\quad u_S = u_3, \quad v_S = v_3, \end{aligned} \tag{13.11}$$

na način koji je analogan izvođenju funkcija oblika za konačne elemente koji je detaljno opisan u 6. poglavlju, izvodi se funkcija oblika $\mathbf{N}_S$. Budući da prema relaciji (8.10), $\mathbf{u}_S = \mathbf{N}_S \mathbf{v}$, matrica $\mathbf{N}_S$ povezuje pomake duž opterećenog ruba $\mathbf{u}_S^T = \begin{bmatrix} u_S & v_S \end{bmatrix}$ sa stupnjevima slobode konačnog elementa

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}, \tag{13.12}$$

matrica funkcija oblika jednaka je

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(1-\frac{s}{\ell}\right) & 0 & \frac{s}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1-\frac{s}{\ell}\right) & 0 & \frac{s}{\ell} \end{bmatrix}. \tag{13.13}$$

Nije teško zaključiti da su članovi različiti od nule u matrici (13.13) jednaki funkcijama oblika (6.20) osnovnoga štapnog elementa, što slijedi iz jednakih linearnih funkcija pomaka. Uvrštavanjem (13.8) i (13.13) u (13.9), izraz za izračunavanje čvornih sila postaje

$$\mathbf{F}_S = \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \left(1-\frac{s}{\ell}\right) & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{s}{\ell}\right) \\ \frac{s}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{s}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{bx}(s) \\ q_{by}(s) \end{bmatrix} h\,\mathrm{d}s\,. \tag{13.14}$$

Pomoću ove relacije moguće je izračunati sile u čvorovima za proizvoljnu raspodjelu opterećenja koje je funkcija lokalne koordinate s. U posebnom slučaju kada duž stranice između čvorova *2* i *3* djeluje jednoliko kontinuirano opterećenje q_{x0} u pravcu osi x, tj. vektor opterećenja jednak je $\mathbf{q}_b^T(s) = \begin{bmatrix} q_{x0} & 0 \end{bmatrix}$, za jediničnu debljinu konačnog elementa $h = 1$, izračunavaju se sljedeće vrijednosti čvornih sila

$$\mathbf{F}_S^T = \frac{q_{x0}\ell}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.15}$$

Korisno je napomenuti da sile u čvorovima elementa poradi raspodijeljenoga površinskog opterećenja koje djeluje duž ruba elementa, ovise isključivo o raspodjeli pomaka duž toga ruba. Drugim riječima, za različite elemente uz istu raspodjelu pomaka duž ruba na kojemu djeluje opterećenje, sile u čvorovima bit će jednake.

Primjena osnovnoga trokutnog elementa za rješavanje problema naprezanja i deformacije pokazat će se u sljedećem primjeru. Analizira se rastezanje tanke

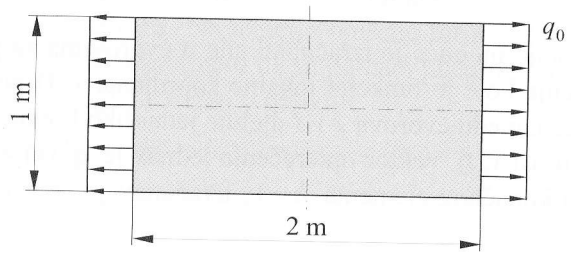
ploče za dva različita slučaja opterećenja. Za prvi slučaj, kad je ploča opterećena jednoliko kontinuirano i kad je polje pomaka linearno, pokazat će se da je rješenje dobiveno konačnim elementima jednako točnom rješenju. Kad je kontinuirano opterećenje zamijenjeno koncentriranim silama, raspodjela pomaka u konstrukciji je nelinearna i nije ju moguće točno opisati s prikazanim proračunskim modelom. U ovom primjeru još jednom će se prikazati postupak izvođenja globalne matrice krutosti primjenom metode direktne superpozicije koja je opisana u odjeljku 8.2.3.

Primjer 13.1. Pravokutna tanka ploča debljine $h = 0.01$ m opterećena je na rastezanje jednolikim kontinuiranim opterećenjem q_0, prema slici P13.1.1. Pomoću osnovnih trokutnih konačnih elemenata potrebno je provesti analizu naprezanja za dva slučaja opterećenja:

a) jednoliko kontinuirano opterećenje,
b) opterećenje jednakim koncentriranim silama F_0 u vrhovima pravokutne ploče čiji je ukupan iznos jednak kontinuiranom opterećenju.

Zadano: $q_0 = 10^3 \dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$, $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$.

a) Jednoliko kontinuirano opterećenje



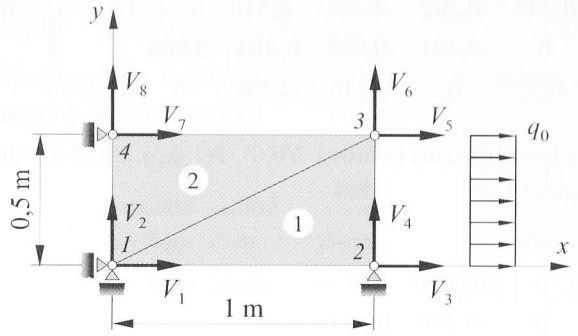
Slika P13.1.1. Pravokutna ploča opterećena jednoliko kontinuirano

Budući da je problem simetričan, razmatrat će se jedna četvrtina ploče koja se dijeli na dva osnovna trokutna elementa. Elementi zajedno s globalnim stupnjevima slobode prikazani su na proračunskom modelu na slici P13.1.2. Poradi jednostavnosti, pomaci u čvorovima označeni su rednim brojevima pa je vektor globalnih stupnjeva slobode jednak

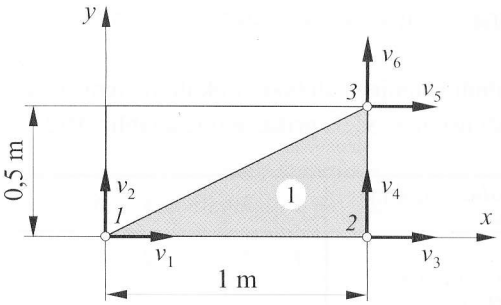
$$\mathbf{V}^T = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6 \quad V_7 \quad V_8]. \tag{a}$$

Lokalni stupnjevi slobode osnovnih trokutnih elemenata 1 i 2 prikazani su vektorom

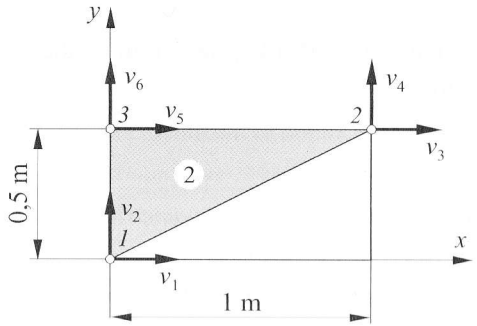
$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix}. \qquad \text{(b)}$$



Slika P13.1.2. Proračunski model



Slika P13.1.3. Element 1



Slika P13.1.4. Element 2

Za koordinate čvorova *1*(0;0), *2*(1;0), *3*(1;0,5) prema slici P13.1.3. i zadane elastične konstante materijala, matrica krutosti elementa 1 izračunava se pomoću relacija (13.4) i (13.5) u obliku

$$\mathbf{k}_g^1 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,577 & & & & & \\ 0 & 0,202 & & \textit{simetrično} & & \\ -0,58 & 0,404 & 1,385 & & & \\ 0,346 & -0,202 & -0,75 & 2,51 & & \\ 0 & -0,404 & -0,808 & 0,404 & 0,808 & \\ -0,35 & 0 & 0,346 & -2,308 & 0 & 2,308 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}. \quad \text{(c)}$$

Za element 2 s koordinatama čvorova *1*(0;0), *2*(1;0,5), *3*(0;0,5), slika P13.1.4., matrica krutosti jednaka je

$$\mathbf{k}_g^2 = 10^6 \begin{bmatrix} 0,808 & & & & & \\ 0 & 2,308 & & \textit{simetrično} & & \\ 0 & -0,346 & 0,577 & & & \\ -0,41 & 0 & 0 & 0,202 & & \\ -0,81 & 0,346 & -0,577 & 0,404 & 1,385 & \\ 0,404 & -2,308 & 0,346 & -0,202 & -0,75 & 2,51 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}. \quad \text{(d)}$$

Podudaranje lokalnih stupnjeva slobode trokutnih elemenata s globalnim stupnjevima slobode proračunskog modela prikazano je u tablici P13.1.

Globalni stupnjevi slobode		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Stupnjevi slobode elemenata	1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*		
	2	*1*	*2*			*3*	*4*	*5*	*6*

Tablica P13.1. Lokalni i globalni stupnjevi slobode

Prema podacima iz tablice, na način koji je opisan u odjeljku 8.2.3., izračunava se globalna matrica krutosti

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{bmatrix} 1,385 & & & & & & & \\ 0 & 2,51 & & & & & & \\ -0,58 & 0,404 & 1,385 & & \textit{simetrično} & & & \\ 0,346 & -0,203 & -0,75 & 2,51 & & & & \\ 0 & -0,75 & -0,808 & 0,404 & 1,385 & & & \\ -0,75 & 0 & 0,346 & -2,308 & 0 & 2,51 & & \\ -0,81 & 0,346 & 0 & 0 & -0,577 & 0,404 & 1,385 & \\ 0,404 & -2,308 & 0 & 0 & 0,346 & -0,203 & -0,75 & 2,51 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}. \quad \text{(e)}$$

Sile u čvorovima za opterećeni element, na temelju (13.15), jednake su

$$\mathbf{F}_S^{1T} = 250\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\ \text{kN}, \tag{f}$$

pa je na temelju tablice globalni vektor opterećenja

$$\mathbf{R}_S^T = 250\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\ \text{kN}. \tag{g}$$

Nakon postavljanja rubnih uvjeta $V_1 = V_2 = V_4 = V_7 = 0$, dobiva se globalna jednadžba proračunskog modela u obliku

$$\mathbf{K}\,\mathbf{V} = \mathbf{R}_S: \qquad 10^6\begin{bmatrix} 1{,}384 & & & \\ -0{,}808 & 1{,}385 & \textit{sim.} & \\ 0{,}346 & 0 & 2{,}511 & \\ 0 & 0{,}346 & -0{,}203 & 2{,}51 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_3 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{h}$$

čijim se rješavanjem izračunavaju nepoznati pomaci

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_8 \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 0{,}4761 \\ 0{,}4761 \\ -0{,}0714 \\ -0{,}0714 \end{bmatrix}\ \text{m}. \tag{i}$$

Nakon povratnog izjednačivanja globalnih stupnjeva slobode sa stupnjevima slobode elemenata, pomaci u čvorovima elementa 1 jednaki su

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}4761 \\ 0 \\ 0{,}4761 \\ -0{,}0714 \end{bmatrix}\ \text{m}. \tag{j}$$

Matrica raspodjele naprezanja izračunava se pomoću relacije (13.7) u obliku

$$\mathbf{S}^1 = 10^7\begin{bmatrix} -23{,}077 & 0 & 23{,}077 & -13{,}846 & 0 & 13{,}846 \\ -6{,}923 & 0 & 6{,}923 & -46{,}154 & 0 & 46{,}154 \\ 0 & -8{,}077 & -16{,}154 & 8{,}077 & 16{,}154 & 0 \end{bmatrix}\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}, \tag{k}$$

nakon čega je naprezanje za element 1

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{S}^1\,\mathbf{v}^1: \qquad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ \text{MPa}. \tag{l}$$

Vektor čvornih pomaka za element 2 jednak je

$$\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,4761 \\ -0,0714 \\ 0 \\ -0,0714 \end{bmatrix} \text{ m}, \tag{m}$$

a matrica je raspodjele naprezanja

$$\mathbf{S}^2 = 10^7 \begin{bmatrix} 0 & 13,846 & 23,077 & 0 & -23,077 & 13,846 \\ 0 & -46,154 & 6,923 & 0 & -6,923 & 46,154 \\ -16,154 & 0 & 0 & 8,077 & 16,154 & -8,077 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}. \tag{n}$$

Množenjem matrice (n) s vektorom pomaka (m) izračunavaju se naprezanja u elementu 2

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{S}^2 \mathbf{v}^2: \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \tag{o}$$

koja su jednaka naprezanjima u elementu 1.

Na jednostavan način moguće je dobiti analitičko rješenje postavljenog problema. Komponenta naprezanja $\sigma_x = \frac{q_0}{h} = 100$ MPa, a ostale komponente jednake su nuli.

Integriranjem poznatih relacija teorije elastičnosti $\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\sigma_x}{E}$ i $\varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$ dobivaju se izrazi za raspodjelu pomaka po površini jednoliko opterećene ploče

$$u = \frac{\sigma_x}{E} x, \qquad v = -\frac{\nu\sigma_x}{E} y \tag{p}$$

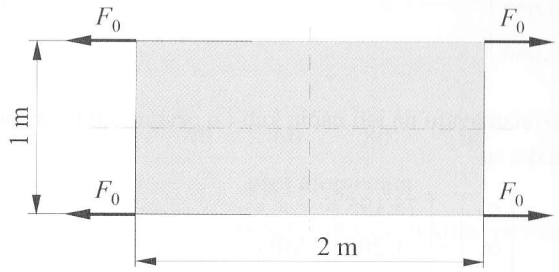
Za koordinate $x = 1$ m i $y = 0,5$ m u prikazanom koordinatnom sustavu, izračunavaju se maksimalni pomaci $u = 0,4761$ mm i $v = 0,0714$ mm. Na taj je način ukupno produljenje razmatrane ploče $2u = 0,9524$ mm, dok je promjena dimenzije u pravcu osi y jednaka $2v = 0,1428$ mm.

Lako je zaključiti da su vrijednosti dobivene pomoću metode konačnih elemenata potpuno jednake analitičkim rješenjima. Razlog potpunog podudaranja analitičkih i numeričkih rješenja je točno opisivanje raspodjele pomaka. Naime, stvarnu linearnu raspodjelu pomaka u razmatranoj konstrukciji moguće je točno opisati osnovnim trokutnim elementima, što je razlog da su dobivene vrijednosti naprezanja također

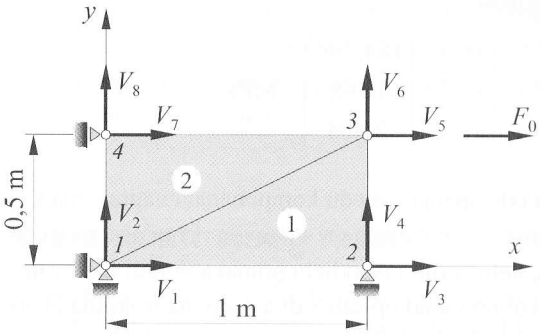
točne. U slučaju kad raspodjela pomaka u konstrukciji nije linearna, primjenom opisanih trokutnih elemenata moguće je postići samo približno rješenje, što pokazuje drugi dio ovog primjera.

b) Opterećenje jednakim koncentriranim silama F_0 u vrhovima pravokutne ploče čiji je ukupan iznos jednak kontinuiranom opterećenju

U ovom slučaju ploča je opterećena silama $F_0 = 500$ kN prema slici P13.1.5.



Slika P13.1.5. Pravokutna ploča opterećena koncentriranim silama



Slika P13.1.6. Proračunski model

Budući da su konačni elementi zajedno s koordinatama čvorova, slika P13.1.6., ostali nepromijenjeni, globalna matrica krutosti jednaka je kao i u prethodnom slučaju. Mijenja se samo vektor opterećenja. Umjesto čvornih sila $\mathbf{R}_S$, sada je opterećenje opisano vektorom

$$\mathbf{Q}^T = 500\,[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\ \text{kN}, \tag{r}$$

pa je sustav jednadžbi nakon postavljanja rubnih uvjeta jednak

$$10^8\begin{bmatrix} 13,846 & & & \\ -8,077 & 13,846 & sim. & \\ 3,462 & 0 & 25,108 & \\ 0 & 3,462 & -2,031 & 25,085 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_3 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(s)}$$

Njegovim rješavanjem izračunava se vektor pomaka

$$\mathbf{V} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,593 \\ -0,057 \\ -0,086 \end{bmatrix} \text{m}. \qquad \text{(t)}$$

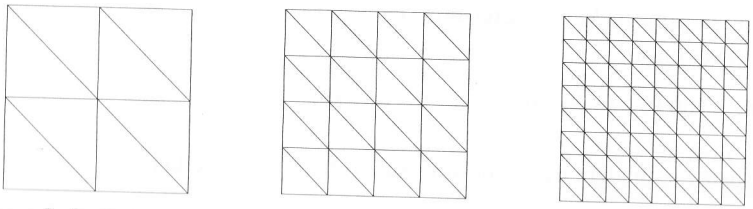
Naprezanja se izračunavaju na isti način kao i u prvom dijelu primjera. Naprezanja u elementu 1 jednaka su

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{S}^1\,\mathbf{v}^1: \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75,195 \\ -1,209 \\ 37,606 \end{bmatrix} \text{MPa}, \qquad \text{(u)}$$

a za element 2 vrijedi

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{S}^2\,\mathbf{v}^2: \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 124,796 \\ 1,168 \\ 2,404 \end{bmatrix} \text{MPa}. \qquad \text{(v)}$$

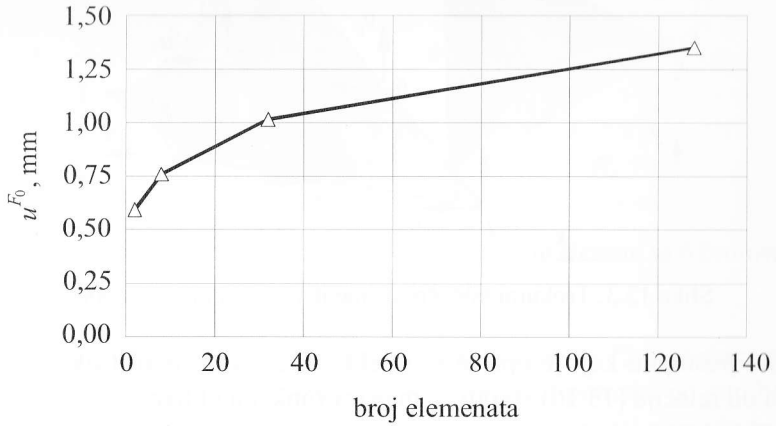
Ovdje su znatna odstupanja između komponenata naprezanja koja su pridružena različitim elementima, što pokazuje da s dva elementa nije moguće postići prihvatljivo rješenje. Naime, nelinearnu raspodjelu pomaka poradi djelovanja koncentriranih sila nije moguće dovoljno točno opisati s dva osnovna trokutna elementa s linearnom raspodjelom pomaka. To je razlog da je za veće približavanje točnim vrijednostima naprezanja i deformacije potreban proračunski model s više elemenata. Na slici P13.1.7. prikazane su mreže s 8, 32 i 128 elemenata za koje je razmatrana konvergencija komponente pomaka u u pravcu osi x u hvatištu koncentrirane sile.



8 elementa 32 elementa 128 elementa

Slika P13.1.7. Mreže s različitim brojem elemenata

Izračunate vrijednosti pomaka za mreže s 2, 8, 32 i 128 elemenata označene su na slici P13.1.8.



Slika P13.1.8. Konvergencija pomaka u hvatištu koncentrirane sile F_0

Nije teško uočiti da se povećanjem broja elemenata vrijednost izračunatog pomaka znatno povećava. Zbog velikoga gradijenta deformacije na mjestu djelovanja koncentriranih sila, za postizanje dovoljno točnog rješenja potreban je još veći broj elemenata od ovdje prikazanog. Osim povećanja broja osnovnih trokutnih elemenata, približavanje točnom rješenju moguće je postići primjenom elemenata višeg reda koji će se razmatrati u sljedećem odjeljku.

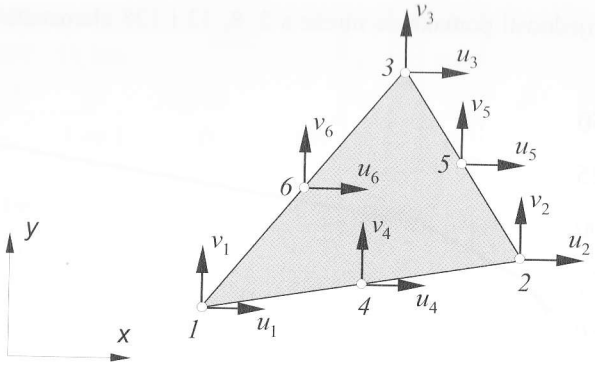
13.2. Trokutni elementi višeg reda

Kako bi se povećao stupanj polinoma funkcije pomaka, a na taj način i red funkcije koja opisuje raspodjelu deformacije i naprezanja u elementu, potrebno je povećati broj stupnjeva slobode konačnog elementa. Izvode se elementi višeg reda u kojima su, za razliku od osnovnih trokutnih elemenata, čvorovi razmješteni duž stranica i po plohi elementa. Kad je funkcija pomaka polinom drugoga stupnja, konačni je element višeg reda sa 6 čvorova i 12 stupnjeva slobode, slika 13.3. Komponente pomaka opisane su sljedećim potpunim polinomom drugoga stupnja:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 , \\ v &= a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2 . \end{aligned} \tag{13.16}$$

Vektor stupnjeva slobode jednak je

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{bmatrix}. \tag{13.17}$$



Slika 13.3. Trokutni konačni element s 12 stupnjeva slobode

Analogno postupku koji je opisan u odjeljku 6.2. za osnovni trokutni element, polazeći od relacija (13.16) izvodi se matrica funkcija oblika

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}, \quad (13.18)$$

gdje su funkcije oblika

$$N_1(x)=\frac{1}{2A^2}\left[\alpha_2(\alpha_2-A)+(2\alpha_2-A)\beta_2 x+(2\alpha_2-A)\gamma_2 y+\beta_2^2x^2+2\beta_2\gamma_2 xy+\gamma_2^2y^2\right],$$

$$N_2(x)=\frac{1}{2A^2}\left[\alpha_3(\alpha_3-A)+(2\alpha_3-A)\beta_3 x+(2\alpha_3-A)\gamma_3 y+\beta_3^2x^2+2\beta_3\gamma_3 xy+\gamma_3^2y^2\right],$$

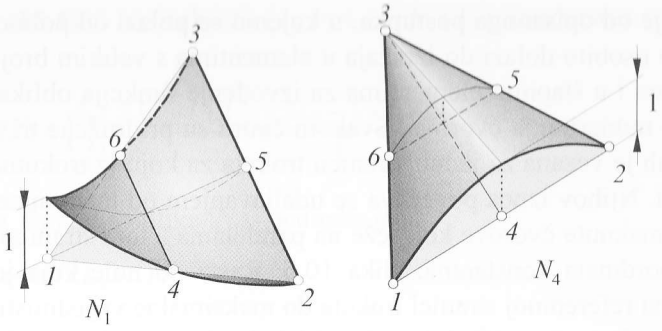
$$N_3(x)=\frac{1}{2A^2}\left[\alpha_1(\alpha_1-A)+(2\alpha_1-A)\beta_1 x+(2\alpha_1-A)\gamma_1 y+\beta_1^2x^2+2\beta_1\gamma_1 xy+\gamma_1^2y^2\right], \quad (13.19)$$

$$N_4(x)=\frac{1}{A^2}\left[\alpha_3\alpha_1+(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)x+(\alpha_3\gamma_1+\alpha_1\gamma_3)y+\beta_3\beta_1x^2+(\beta_3\gamma_1+\gamma_3\beta_1)xy+\gamma_3\gamma_1y^2\right],$$

$$N_5(x)=\frac{1}{A^2}\left[\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)x+(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)y+\beta_1\beta_2x^2+(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)xy+\gamma_1\gamma_2y^2\right],$$

$$N_6(x)=\frac{1}{A^2}\left[\alpha_2\alpha_3+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)x+(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)y+\beta_2\beta_3x^2+(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)xy+\gamma_2\gamma_3y^2\right].$$

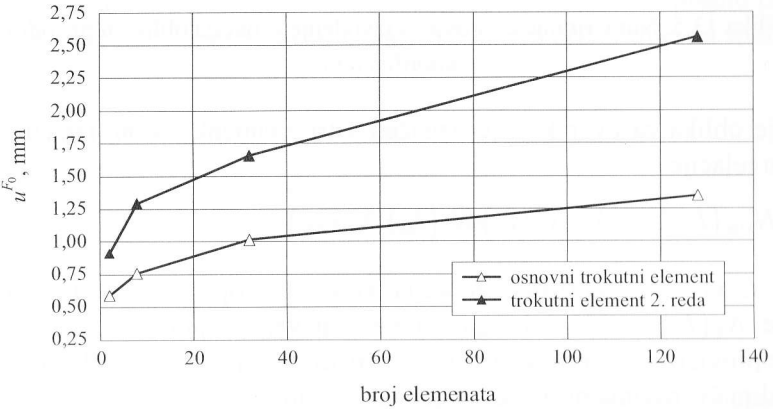
U izrazima za funkcije oblika, veličine α_i, β_i i γ_i $(i=1,2,3)$ opisane su relacijama (6.50), a A je površina trokutnog elementa koja je u (6.46) prikazana u obliku determinante. Lako je uočiti dva tipa interpolacijskih funkcija drugog reda. Oblik izraza za funkcije N_1, N_2 i N_3 koje su pridružene čvorovima u vrhovima trokuta različit je od relacija za N_4, N_5 i N_6 koje se odnose na čvorove na stranicama elementa. Funkcije oblika N_1 i N_4 grafički su prikazane na slici 13.4.



Slika 13.4. Funkcije oblika N_1 i N_4 za trokutni konačni element sa 6 čvorova i 12 stupnjeva slobode

Nije teško zaključiti da prikazani element sa 6 čvorova i 12 stupnjeva slobode spada u grupu konformnih elemenata jer je raspodjelu pomaka po paraboli drugoga reda duž stranica elementa moguće jednoznačno opisati pomoću tri podatka, a to su stupnjevi slobode u pripadnim čvorovima. Matrica krutosti izvodi se analogno opisanom postupku kod osnovnog trokutnog elementa. Raspodjela deformacije i naprezanja u elementu je linearna.

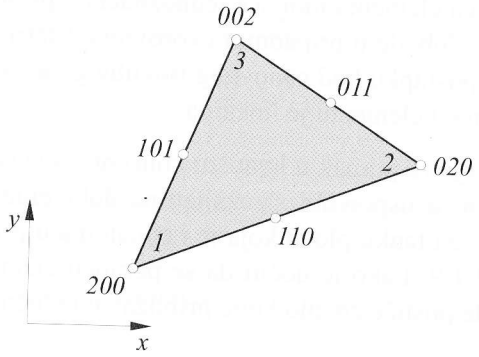
Konvergencija rješenja za pomak u hvatištu koncentrirane sile koja su dobivena opisanim elementom, u usporedbi s rezultatima dobivenim pomoću osnovnih trokutnih elemenata, za tanku ploču koja je razmatrana u primjeru 13.1b, prikazana je na slici P13.1.9. Lako je uočiti da se pomoću elemenata drugog reda s 12 stupnjeva slobode postiže znatno bolje približavanje točnom rješenju.



Slika P13.1.9. Konvergencija rješenja dobivenih pomoću elemenata drugog reda u usporedbi s vrijednostima dobivenim pomoću osnovnih trokutnih elemenata

Funkcije oblika za trokutne elemente višeg reda često se izvode u prirodnim trokutnim koordinatama koje su opisane u odjeljku 10.2. Postupak izvođenja je-

dnostavniji je od opisanoga postupka, u kojemu se polazi od polinoma funkcije pomaka, što osobito dolazi do izražaja u elementima s velikim brojem čvorova. I ovdje je kao i u štapnim elementima za izvođenje funkcija oblika uveden poseban način numeriranja čvorova. Svakom čvoru su pridružene tri znamenke, a svaka od njih je vezana za jednu stranicu trokuta za koju je trokutna koordinata jednaka nuli. Njihov iznos povećava se udaljavanjem od te stranice, a označuje jednako razmaknute čvorove koji leže na paralelama s tom stranicom za koje je prirodna koordinata konstantna, slika 10.5. Raste od nule koja je pridružena čvorovima na referentnoj stranici trokuta do maksimalne vrijednosti u čvoru koji je u vrhu trokuta nasuprot te stranice. Maksimalna vrijednost jednaka je stupnju polinoma interpolacijske funkcije. Na taj način, prva znamenka jednaka je nuli za čvorove duž stranice za koju je $L_1 = 0$, te raste do maksimalnog iznosa u čvoru u vrhu trokuta koji leži nasuprot te stranice. Primjenjujući opisano pravilo, čvorovi elementa sa šest čvorova sad su numerirani prema slici 13.5.



Slika 13.5. Numeriranje čvorova za izvođenje funkcija oblika u prirodnim koordinatama

Funkcije oblika za čvor koji je označen s tri znamenke $k\ell m$ izračunavaju se pomoću relacije

$$N_{k\ell m}(L_1, L_2, L_3) = N_k(L_1)\, N_\ell(L_2)\, N_m(L_3), \tag{13.20}$$

gdje su L_i $(i = 1,2,3)$ prirodne trokutne koordinate opisane relacijom (10.13), a funkcije $N_k(L_1)$, $N_\ell(L_2)$ i $N_m(L_3)$ izračunavaju se pomoću relacije (12.49). Lako je provjeriti da za funkciju oblika vrijedi $N_{k\ell m}(L_1, L_2, L_3) = 1$ u čvoru $k\ell m$, a u ostalim čvorovima njezin iznos jednak je nuli.

Prema relaciji (13.20), funkcija oblika za čvor *002* konačnog elementa na slici 13.5. jednaka je

$$N_{002}(L_1, L_2, L_3) = N_0(L_1)\, N_0(L_2)\, N_2(L_3). \tag{13.21}$$

Na temelju (12.49), $N_0(L_1)=N_0(L_2)=1$, a $N_2(L_3)$ izračunava se pomoću relacije

$$N_2(L_3)=\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{2L_3-i+1}{i}\right)=\frac{2L_3-1+1}{1}\,\frac{2L_3-2+1}{2}=L_3(2L_3-1)\,. \qquad (13.22)$$

Na taj način, funkcija oblika N_{002} jednaka je

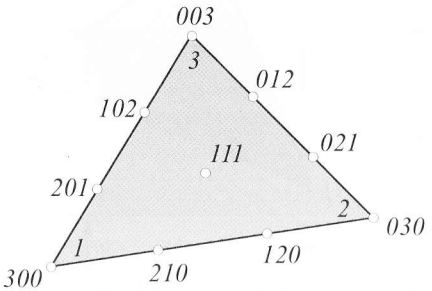
$$N_{002}=L_3(2L_3-1)\,. \qquad (13.23)$$

Analogno se izračunavaju funkcije oblika za ostale čvorove

$$\begin{aligned} N_{020}&=L_2(2L_2-1)\,,\\ N_{200}&=L_1(2L_1-1)\,,\\ N_{011}&=4L_2L_3\,,\\ N_{110}&=4L_1L_2\,,\\ N_{101}&=4L_1L_3\,. \end{aligned} \qquad (13.24)$$

Ako se prirodne koordinate u (13.23) i (13.24) pomoću (10.13) zamijene s Kartezijevim koordinatama x i y, dobivaju se izrazi koji su jednaki funkcijama oblika (13.19).

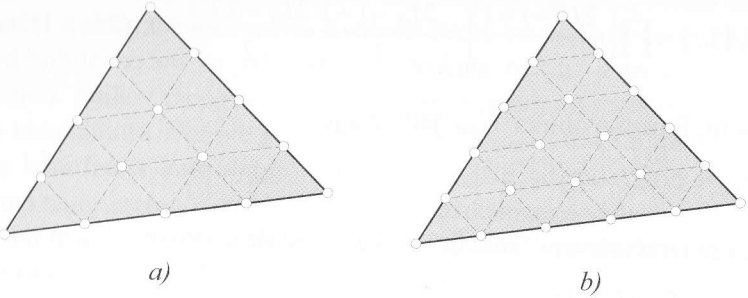
Na opisani način moguće je izvesti funkcije oblika za trokutne elemente s većim brojem čvorova. Ako je polje pomaka u trokutnom elementu opisano potpunim polinomom trećeg stupnja, položaj njegovih čvorova prikazan je na slici 13.6.



Slika 13.6. Trokutni konačni element s 10 čvorova i 20 stupnjeva slobode

Lako je uočiti da je položaj čvorova u trokutnom elementu analogan položaju članova pripadnoga potpunog polinoma 3. stupnja u Pascalovu trokutu na slici 9.2. Funkcije oblika u prirodnim koordinatama izvode se pomoću relacija (13.20) i (12.49). Na analogan način moguće je povećati broj čvorova za trokut-

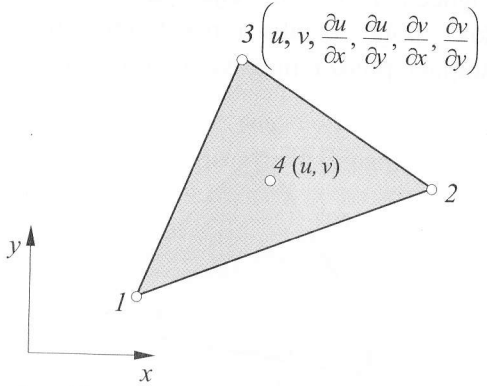
ne elemente s interpolacijskim funkcijama višeg reda. Elementi s potpunim polinomima 4. i 5. stupnja prikazani su na slici 13.7.



a) b)

Slika 13.7. Trokutni konačni elementi višeg reda: a) primjena polinoma 4. stupnja, b) primjena polinoma 5. stupnja

Umjesto povećanja broja čvorova, isto kao i kod jednodimenzijskih konačnih elemenata, broj stupnjeva slobode moguće je povećati uvođenjem derivacija pomaka. Na primjer, umjesto elementa s 10 čvorova i 20 stupnjeva slobode na slici 13.6., uz nepromijenjene funkcije pomaka i ukupan broj stupnjeva slobode, moguće je izvesti element s 4 čvora, prema slici 13.8. Stupnjevi slobode u vrhovima trokuta osim pomaka u i v jesu derivacije $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, a u svrhu očuvanja potpunosti polinoma funkcije pomaka, dodan je u težištu trokuta još jedan čvor s dva stupnja slobode u i v.



Slika 13.8. Trokutni konačni element s 4 čvora i 20 stupnjeva slobode

Prednost koncentriranja stupnjeva slobode u manjem broju čvorova u odnosu na elemente s više čvorova obrazložena je u odjeljku 12.4. gdje se govori o jednodimenzijskim konačnim elementima.

13.3. Osnovni pravokutni element

Najjednostavniji pravokutni konačni element osnovni je pravokutni element, slika 13.9. Sastoji se od četiri čvora u vrhovima pravokutnika s po dva stupnja slobode u svakom čvoru. Sve relacije najčešće se izvode u odnosu na lokalni koordinatni sustav s osima paralelnim sa stranicama elementa i ishodištem u težištu. Stupnjevi slobode pomaci su u pravcu koordinatnih osi x i y

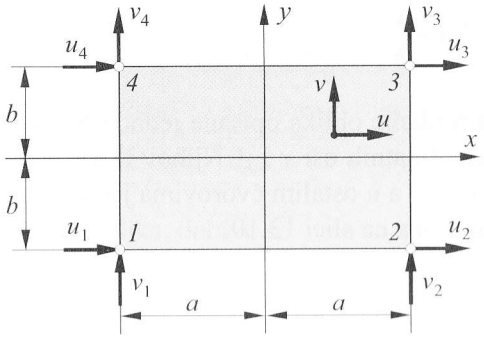
$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}. \tag{13.25}$$

Polje pomaka opisano je nepotpunim polinomima drugog stupnja

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy, \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy, \end{aligned} \tag{13.26}$$

što je u matričnom zapisu jednako

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}: \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}. \tag{13.27}$$



Slika 13.9. Osnovni pravokutni konačni element

Uvrštavanjem rubnih uvjeta za čvorove $x = x_i$ i $y = y_i$, $u = u_i$ i $v = v_i$ (i = 1,2,3,4) u izraze (13.26), za koordinate čvorova prema slici 13.9. dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\,\mathbf{a}: \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}. \quad (13.28)$$

Pomoću već poznate relacije $\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{C}^{-1}$ izračunava se matrica funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (13.29)$$

gdje su funkcije oblika

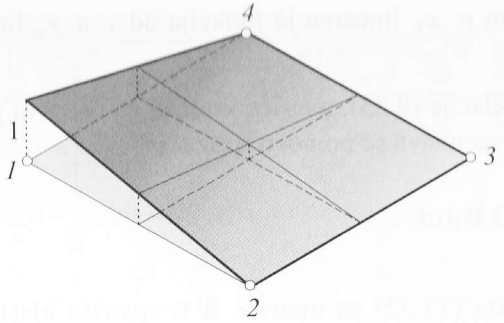
$$N_1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$N_2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad (13.30)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Lako je uočiti da su funkcije oblika opisane jednodimenzijskim linearnim polinomima u pravcu koordinatnih osi x i y. Njihov iznos jednak je jedinici u čvorovima za koje se odnose, a u ostalim čvorovima jednake su nuli. Funkcija oblika N_1 grafički je prikazana na slici 13.10.



Slika 13.10. Grafički prikaz funkcije oblika N_1

Matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima izračunava se deriviranjem funkcija oblika prema već prikazanoj relaciji $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator (3.52). Na taj način matrica **B** jednaka je

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}. \qquad (13.31)$$

Nakon deriviranja funkcija oblika, dobiva se

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 & (b+y) & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & (a+x) & 0 & (a-x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & (b-y) & (a+x) & (b+y) & (a-x) & -(b+y) \end{bmatrix}. \qquad (13.32)$$

Korisno je podsjetiti se da se raspodjela deformacije po elementu izračunava relacijom $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\mathbf{v}$, a komponente deformacije jednake su $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}$. Na temelju (13.32) lako je zaključiti da se komponenta deformacije ε_x linearno mi-

jenja s koordinatom y, ε_y linearna je funkcija od x, a γ_{xy} linearno se mijenja s koordinatama x i y.

Polazeći od opće relacije (8.23), matrica krutosti za osnovni pravokutni element prema slici 13.9. izračunava se pomoću izraza

$$\mathbf{k} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,dxdy\,. \tag{13.33}$$

Uvrštavanjem izraza (13.32) za matricu **B** te matrice elastičnosti (3.95) pod dvostruki integral u (13.33), nakon množenja matrica i integriranja, dobiva se matrica krutosti za ravninsko stanje naprezanja koja je prikazana izrazom (13.34). Nije teško zaključiti da je dobivena matrica krutosti kvadratna i simetrična matrica, a njezin red je jednak broju stupnjeva slobode konačnog elementa.

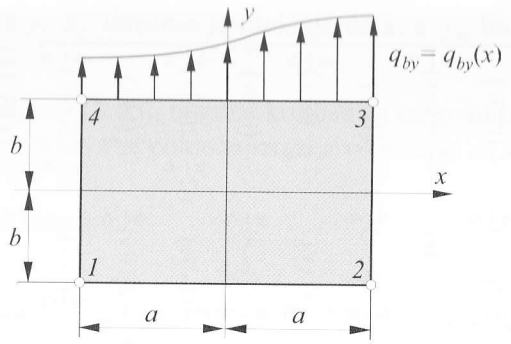
Na isti način kao i za trokutni element, određuje se raspodjela unutarnjih sila. Nakon množenja matrice elastičnosti i matrice **B**, matrica **S** za ravninsko stanje naprezanja dobiva se u obliku

$$\mathbf{S} = \frac{Eh}{4ab(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} y-b & \nu(x-a) & b-y & -\nu(a+x) \\ \nu(y-b) & x-a & \nu(b-y) & -(a+x) \\ \frac{1}{2}(1-\nu)(x-a) & \frac{1}{2}(1-\nu)(y-b) & -\frac{1}{2}(1-\nu)(a+x) & \frac{1}{2}(1-\nu)(b-y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b+y & \nu(a+x) & -(b+y) & \nu(a-x) \\ \nu(b+y) & a+x & -\nu(b+y) & a-x \\ \frac{1}{2}(1-\nu)(a+x) & \frac{1}{2}(1-\nu)(b+y) & \frac{1}{2}(1-\nu)(a-x) & -\frac{1}{2}(1-\nu)(b+y) \end{bmatrix}. \tag{13.35}$$

Budući da je $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\,\mathbf{v}$, a komponente vektora $\boldsymbol{\sigma}$ unutarnje su sile N_x, N_y i N_{xy} prema (13.6), na temelju (13.35) lako je zaključiti da su unutarnje sile linearna funkcija koordinata x i y, odnosno linearno se mijenjaju po površini elementa. Njihova linearna promjena kod osnovnog pravokutnog konačnog elementa jest prednost u odnosu na osnovni trokutni element s kojim je moguće opisati samo konstantno polje unutarnjih sila. Nedostatak opisanoga elementa u odnosu na osnovni trokutni element je nepotpunost polinoma funkcije pomaka.

$$\mathbf{k}=\frac{Eh}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix}
4\frac{b}{a}+2(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -4\frac{b}{a}+(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -2\frac{b}{a}-(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\frac{b}{a}-2(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1-3\nu)\\
\frac{3}{2}(1+\nu) & 4\frac{a}{b}+2(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\frac{a}{b}-2(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & -2\frac{a}{b}-(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\frac{a}{b}+(1-\nu)\frac{b}{a}\\
-4\frac{b}{a}+(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 4\frac{b}{a}+2(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\frac{b}{a}-2(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -2\frac{b}{a}-(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1+\nu)\\
-\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\frac{a}{b}-(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 4\frac{a}{b}+2(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\frac{a}{b}+(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2\frac{a}{b}-(1-\nu)\frac{b}{a}\\
-2\frac{b}{a}-(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 2\frac{b}{a}-2(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 4\frac{b}{a}+2(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -4\frac{b}{a}+(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1-3\nu)\\
-\frac{3}{2}(1+\nu) & -2\frac{a}{b}-(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\frac{a}{b}+(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1+\nu) & 4\frac{a}{b}+2(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\frac{a}{b}-2(1-\nu)\frac{b}{a}\\
2\frac{b}{a}-2(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & -2\frac{b}{a}-(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -4\frac{b}{a}+(1-\nu)\frac{a}{b} & \frac{3}{2}(1-3\nu) & 4\frac{b}{a}+2(1-\nu)\frac{a}{b} & -\frac{3}{2}(1+\nu)\\
\frac{3}{2}(1-3\nu) & -4\frac{a}{b}+(1-\nu)\frac{b}{a} & \frac{3}{2}(1+\nu) & -2\frac{a}{b}-(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1-3\nu) & 2\frac{a}{b}-2(1-\nu)\frac{b}{a} & -\frac{3}{2}(1+\nu) & 4\frac{a}{b}+2(1-\nu)\frac{b}{a}
\end{bmatrix} \tag{13.34}$$



Slika 13.11. Proizvoljno kontinuirano opterećenje duž jedne stranice elementa

Kada duž stranica u ravnini elementa djeluje proizvoljno kontinuirano opterećenje, sile u čvorovima određuju se na način koji je opisan za osnovni trokutni element. Ako opterećenje djeluje duž stranice između čvorova *3* i *4* prema slici 13.11., funkcije oblika za taj rub moguće je jednostavno odrediti pomoću izraza (13.30). Budući da je za opterećeni rub $y = b$, nakon uvrštavanja u (13.30) dobiva se matrica funkcija oblika

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix}. \quad (13.36)$$

Opterećenje je funkcija koordinate x pa je vektor $\mathbf{q}_b$ jednak

$$\mathbf{q}_b^T(x) = \begin{bmatrix} 0 & q_{by}(x) \end{bmatrix}. \quad (13.37)$$

U skladu s relacijama (8.18) i (13.9), sile u čvorovima poradi proizvoljnoga kontinuiranog opterećenja $q_{by} = q_{by}(x)$ izračunavaju se pomoću sljedećeg izraza:

$$\mathbf{F}_S = \int_{-a}^{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_{by}(x) \end{bmatrix} h\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.38}$$

Kad opterećenje djeluje duž ostalih rubova, sile u čvorovima izračunavaju se na analogan način.

13.4. Pravokutni elementi višeg reda

13.4.1. Primjena Lagrangeovih interpolacijskih polinoma

Zbog boljeg razumijevanja korisno je najprije prikazati primjenu jednodimenzijskih Lagrangeovih polinoma za izvođenje već poznatih funkcija oblika osnovnoga pravokutnog elementa. Potrebno je uočiti da taj element, prikazan na slici 13.9., ima po dva čvora u pravcu koordinatnih osi x i y. Kroz te čvorove u pravcu koordinatnih osi provući će se interpolacijski polinomi rabeći relaciju (11.2). Za dva čvora u pravcu osi x, Lagrangeovi polinomi jednaki su

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \qquad l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{13.39}$$

Nakon uvrštavanja koordinata čvorova $x_1 = -a$ i $x_2 = a$, izrazi (13.39) postaju

$$l_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right), \qquad l_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{a}\right). \tag{13.40}$$

Na analogan način izračunavaju se Lagrangeovi polinomi za pravac osi y, za koordinate čvorova $y_1 = -b$ i $y_2 = b$

$$l_1(y)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b}\right), \qquad l_2(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{b}\right). \tag{13.41}$$

Budući da su svojstva Lagrangeovih polinoma jednaka svojstvima funkcija oblika, što je detaljno opisano u odjeljku 11.1., funkcije oblika za prikazani pravokutni konačni element mogu se izračunati množenjem pripadnih polinoma u pravcu koordinatnih osi x i y. Čvoru koji je označen brojem *1* pridružene su koordinate x_1, y_1, pa je pripadna funkcija oblika jednaka produktu Lagrangeovih polinoma $l_1(x)$ i $l_1(y)$. Analogno vrijedi za ostale čvorove. Za čvor *2* je x_2, y_1, u čvoru *3* je x_2, y_2, a za čvor *4* vrijedi x_1, y_2. Na taj način funkcije oblika jednake su

$$N_1 = l_1(x)\, l_1(y)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$N_2 = l_2(x)\, l_1(y)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

$$N_3 = l_2(x)\, l_2(y)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right), \tag{13.42}$$

$$N_4 = l_1(x)\, l_2(y)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

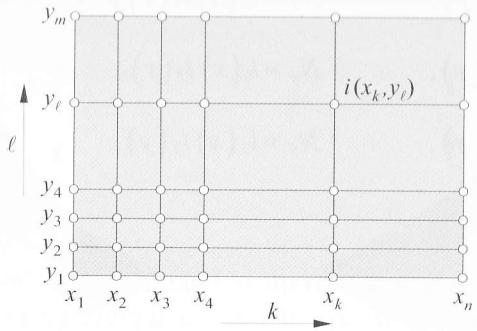
Lako je uočiti da su ove relacije dobivene množenjem dvaju jednodimenzijskih linearnih polinoma te na taj način opisuju bilinearnu interpolaciju komponenata pomaka. Potpuno su jednake relacijama (13.30) iz prethodnog odjeljka koje su izvedene pomoću funkcija pomaka (13.26). Te funkcije također je moguće prikazati u obliku umnoška linearnih polinoma u pravcu koordinatnih osi x i y. Tako, na primjer, nepotpuni polinom drugog stupnja u izrazima (13.26) za pomak u moguće je prikazati u obliku

$$u=(b_1+b_2x)(c_1+c_2y). \tag{13.43}$$

Analogno vrijedi za komponentu pomaka u pravcu osi y.

Potrebno je uočiti da je taj način izvođenja funkcija oblika mnogo jednostavniji od postupka opisanog u prethodnom odjeljku. Prednost primjene Lagrangeovih polinoma dolazi znatno više do izražaja u elementima višeg reda s većim brojem čvorova. Njihove funkcije oblika jednake su produktu jednodimenzijskih polinoma višeg stupnja. Elementi čije su funkcije oblika izvedene primjenom Lagrangeovih polinoma, u literaturi se često nazivaju Lagrangeovi konačni ele-

menti. Za izvođenje funkcija oblika za Lagrangeove elemente višeg reda može korisno poslužiti shema prema slici 13.12.



Slika 13.12. Pomoćna shema za izvođenje funkcija oblika

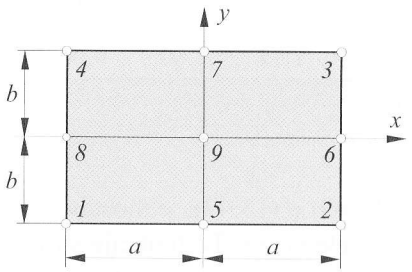
Ako se u pravcu osi x nalazi n čvorova, a m je čvorova u pravcu osi y, pri čemu su proizvoljnom čvoru i pridružene koordinate x_k, y_ℓ, gdje je $1 \le k \le n$, $1 \le \ell \le m$, funkcija oblika N_i u čvoru i jednaka je

$$N_i = l_k(x)\, l_\ell(y), \tag{13.44}$$

gdje je prema (11.2)

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \tag{13.45}$$

$$l_\ell(y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m} \frac{y - y_j}{y_\ell - y_j}. \tag{13.46}$$



Slika 13.13. Lagrangeov konačni element drugog reda

Za element drugog reda s 9 čvorova prema slici 13.13. $n = m = 3$ pa se na temelju (13.44), koristeći se shemom na slici 13.12., dobivaju sljedeći izrazi za funkcije oblika:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= l_1(x)\, l_1(y), & N_6 &= l_3(x)\, l_2(y), \\
N_2 &= l_3(x)\, l_1(y), & N_7 &= l_2(x)\, l_3(y), \\
N_3 &= l_3(x)\, l_3(y), & N_8 &= l_1(x)\, l_2(y), \\
N_4 &= l_1(x)\, l_3(y), & N_9 &= l_2(x)\, l_2(y), \\
N_5 &= l_2(x)\, l_1(y). &&
\end{aligned}
\tag{13.47}
$$

Pomoću relacije (13.45) izračunavaju se Lagrangeovi polinomi za položaj čvorova s koordinatama $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ i $x_3 = a$ u pravcu osi x

$$
\begin{aligned}
l_1(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right), \\
l_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{a^2}, \\
l_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a}\right).
\end{aligned}
\tag{13.48}
$$

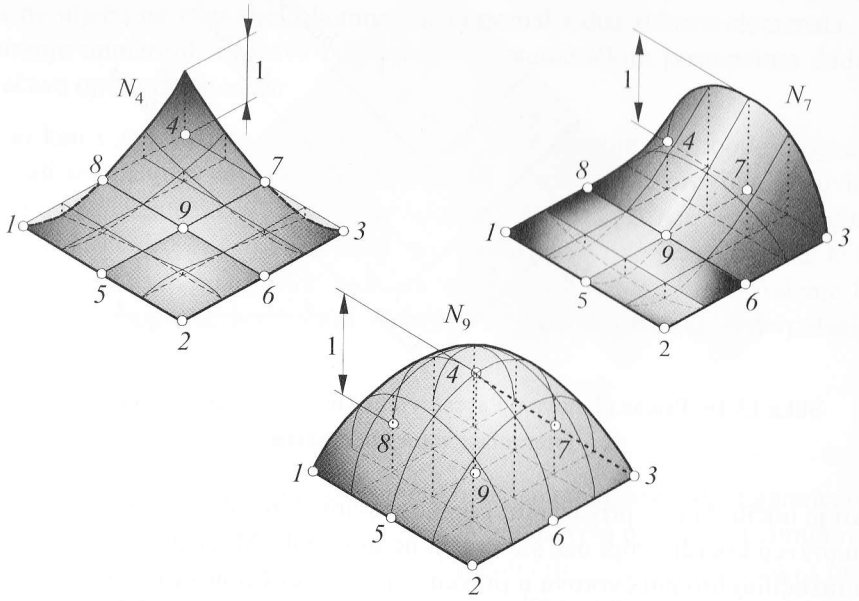
Analogno se za pravac osi y, za položaj čvorova $y_1 = -b$, $y_2 = 0$ i $y_3 = b$, pomoću relacije (13.47) izračunava

$$
\begin{aligned}
l_1(y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right), \\
l_2(y) &= 1 - \frac{y^2}{b^2}, \\
l_3(y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{y}{b}\right).
\end{aligned}
\tag{13.49}
$$

Uvrštavanjem (13.48) i (13.49) u (13.47), jednostavno je izračunati funkcije oblika prikazanoga konačnog elementa. Te funkcije su jednake umnošku jednodimenzijskih polinoma drugog stupnja, odnosno kvadratnih polinoma, što čini bikvadratnu interpolaciju komponenata pomaka. Moguće ih je izvesti iz izraza za polje pomaka na način koji je opisan u prethodnom odjeljku. Pomaci se također mogu prikazati u obliku umnoška jednodimenzijskih potpunih polinoma, što pokazuje izraz za pomak u pravcu osi x

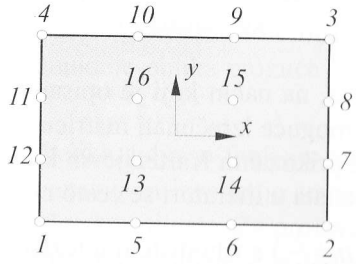
$$u = (b_1 + b_2 x + b_3 x^2)(c_1 + c_2 y + c_3 y^2)\,. \tag{13.50}$$

Funkcije oblika za čvorove *4*, *7* i *9* grafički su prikazane na slici 13.14.



Slika 13.14. Funkcije oblika za čvorove *4*, *7* i *9* Lagrangeova konačnog elementa drugog reda

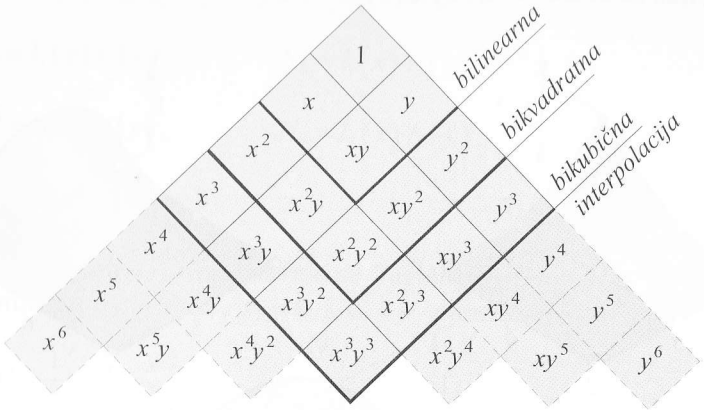
Analognim postupkom izvode se funkcije oblika za elemente višeg reda. Za element trećeg reda prema slici 13.15., po 4 su čvora u pravcu koordinatnih osi, tj. vrijedi $n = m = 4$. Funkcije oblika jednake su umnošku jednodimenzijskih Lagrangeovih polinoma 3. stupnja, što čini bikubičnu interpolaciju komponenata pomaka. Ovdje se te funkcije neće izvoditi.



Slika 13.15. Lagrangeov konačni element trećeg reda

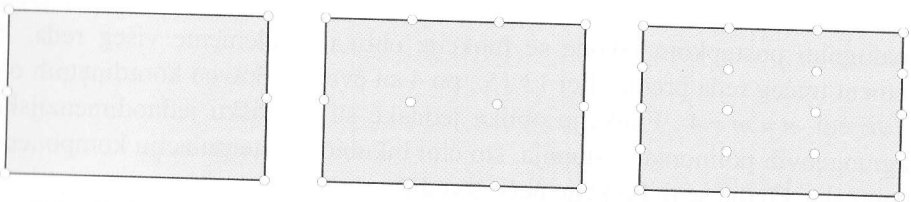
Članovi funkcija pomaka koji čine bilinearnu, bikvadratnu i bikubičnu interpolaciju prikazani su u Pascalovu trokutu na slici 13.16. Na temelju te slike nije

teško prosuditi stupanj nepotpunosti polinoma funkcija pomaka, što je jedan od nedostataka Lagrangeovih konačnih elemenata.



Slika 13.16. Prikaz članova u Pascalovu trokutu koji odgovaraju različitim interpolacijskim funkcijama

Lako je uočiti da je u prikazanim Lagrangeovim elementima jednak broj čvorova u pravcu koordinatnih osi, što uvijek ne mora biti. Moguće je izvesti elemente s različitim brojem čvorova u pravcu osi x i y, pri čemu su funkcije oblika jednake produktu jednodimenzijskih Lagrangeovih polinoma različitih stupnjeva. Neki od tih elemenata prikazani su na slici 13.17.



Slika 13.17. Pravokutni konačni elementi s različitim brojem čvorova u pravcu koordinata x i y

Uz poznate funkcije oblika, na način koji je opisan u odjeljku 13.3., izvodi se matrica **B**, nakon čega je moguće izračunati matricu raspodjele naprezanja i matricu krutosti. Osim ovdje prikazanih Kartezijevih koordinata, za izvođenje Lagrangeovih konačnih elemenata u literaturi se često rabe prirodne bezdimenzijske koordinate ξ, η ($\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}$) s ishodištem u težištu pravokutnika, a duž stranica pravokutnika njihove su vrijednosti ± 1.

Na kraju, korisno je kritički se osvrnuti na Lagrangeovu formulaciju konačnih elemenata. Dobro svojstvo je jednostavno izvođenje funkcija oblika pomoću je-

dnodimenzijskih Lagrangeovih polinoma. Nedostatak je nepotpunost polinoma pripadnih funkcija pomaka, što je lako uočiti u Pascalovu trokutu na slici 13.16. Nepotpunost polinoma otežava konvergenciju rješenja. Osim toga, čvorovi po plohi elemenata znatno povećavaju broj stupnjeva slobode proračunskog modela, a ne utječu na raspodjelu komponenata pomaka duž rubova elemenata. Eliminiranje unutarnjih čvorova odgovarajućim numeričkim postupcima dodatno povećava opseg računanja.

Slično kao i za trokutne konačne elemente, broj stupnjeva slobode moguće je povećati uvođenjem derivacija komponenata pomaka u čvorovima osnovnoga pravokutnog elementa umjesto povećavanjem broja čvorova. Na taj način su stupnjevi slobode pomaci i derivacije pomaka u vrhovima pravokutnika. U tom slučaju, umjesto Lagrangeovih jednodimenzijskih polinoma, za izvođenje funkcija oblika mogu se primijeniti Hermiteovi jednodimenzijski interpolacijski polinomi koji su opisani u odjeljku 11.2.

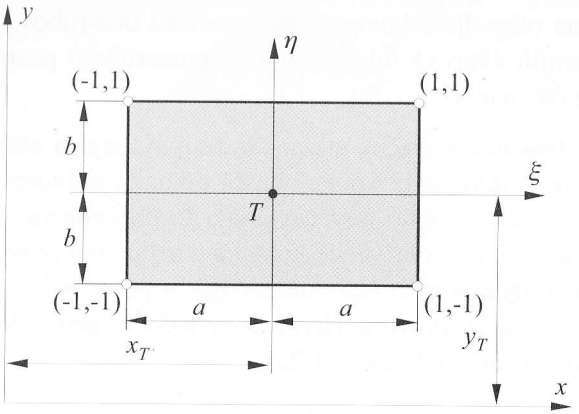
13.4.2. Serendipity elementi

Kao što je navedeno u prethodnom odjeljku, jedan od nedostataka Lagrangeovih elemenata je veliki broj stupnjeva slobode, što je navelo na potrebu eliminiranja čvorova po plohi elementa. Izvedeni su elementi čiji su čvorovi zajedno s pripadnim stupnjevima slobode smješteni samo duž stranica pravokutnika. Na taj način, uz jednaku raspodjelu pomaka duž rubova elementa, ukupan broj stupnjeva slobode znatno je smanjen u odnosu na Lagrangeovu formulaciju. Takvi elementi u literaturi se najčešće nazivaju serendipity elementi. Ime su dobili na malo neuobičajeni način. Autori su im dodijelili naziv prema priči "Tri princa iz Serendipa" (engl. pisac Horace Walpole, 1754.), jer su vjerojatno smatrali da je izvođenje funkcija oblika tih elemenata, kao i u epskoj priči, povezano sa sposobnošću za neočekivana i sretna otkrića [91]. Naime, funkcije oblika izvode se na temelju uvjeta da je njihov iznos jednak jedinici u čvoru na koji se odnose, a u ostalim čvorovima moraju biti jednake nuli, što je za elemente višeg reda s čvorovima samo duž rubova često povezano s domišljatošću i intuicijom autora. Ovdje će se pokazati da je funkcije oblika moguće izvesti sustavno primjenom odgovarajućeg postupka.

Za razliku od prethodnog odjeljka, gdje su funkcije oblika izvedene u lokalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu, za izvođenje serendipity elemenata prikladnije su bezdimenzijske prirodne koordinate. Za proizvoljan koordinatni sustav u ravnini pravokutnika, prirodne su koordinate ξ,η jednake

$$\xi = \frac{x - x_T}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_T}{b}, \tag{13.51}$$

što pokazuje da je njihovo ishodište u težištu pravokutnika s koordinatama x_T, y_T, prema slici 13.18. Na taj način, stranice pravokutnika opisane su koordinatama $\xi = \pm 1$ i $\eta = \pm 1$.



Slika 13.18. Prirodne koordinate ξ, η u ravnini x, y

Najjednostavniji serendipity element osnovni je element ili element prvog reda s 4 čvora koji je jednak osnovnom pravokutnom elementu prema slici 13.9. Njegove funkcije oblika opisane su izrazima (13.30) i (13.42) u Kartezijevu koordinatnom sustavu, a u prirodnim koordinatama ξ, η jednake su

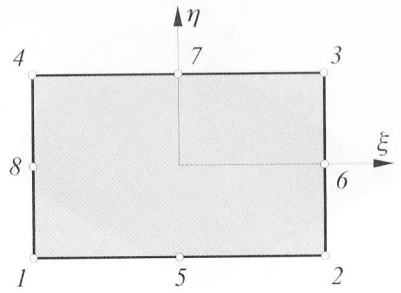
$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i), \tag{13.52}$$

gdje su ξ_i i η_i koordinate čvorova koji su smješteni u vrhovima pravokutnika, slika13.18.

Funkcije oblika za serendipity elemente višeg reda moguće je izvesti množenjem različitih Lagrangeovih interpolacijskih polinoma i pomoću drugih poznatih funkcija oblika. Pritom se za različiti položaj čvorova konačnog elementa primjenjuje različiti postupak izračunavanja. Svrha je postići da je iznos funkcije oblika jednak jedinici u čvoru na koji se ta funkcija odnosi, a u svim ostalim čvorovima njezin iznos jednak je nuli. Osim toga, potrebno je osigurati raspodjelu pomaka duž rubova elementa koja se može jednoznačno opisati stupnjevima slobode u čvorovima koji su pridruženi tim rubovima. Na taj je način omogućeno zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti duž rubova elemenata.

Za serendipity element n-tog reda funkcije oblika za čvorove duž rubova između vrhova pravokutnika dobivaju se množenjem Lagrangeovih interpolacijskih polinoma n-tog stupnja u pravcu toga ruba i Lagrangeovih polinoma 1. stupnja u pravcu normale na rub. Izvod funkcija oblika za čvorove u vrhovima pravoku-

tnika nešto je složeniji. Pritom je od funkcija oblika koje se odnose na čvorove osnovnoga pravokutnog elementa potrebno oduzeti funkcije oblika koje se odnose na čvorove duž rubova pomnožene s odgovarajućim faktorima, tako da iznos rezultirajuće funkcije oblika u svim čvorovima, osim onog na koji se odnosi, bude jednak nuli.



Slika 13.19. Pravokutni serendipity element 2. reda

Opisani postupak prikazat će se na primjeru izvođenja funkcija oblika za serendipity element 2. reda, slika 13.19. Za čvorove na sredini stranica funkcije oblika jednake su produktu Lagrangeova polinoma 2. stupnja duž pripadne stranice i linearnog polinoma u pravcu koordinate koja je okomita na stranicu. Na taj način, za čvor 7 s koordinatama $\xi = 0$, $\eta = +1$, Lagrangeov polinom duž stranice jednak je $\left(1-\xi^2\right)$, a linearni polinom u pravcu koordinate η koja je okomita na tu stranicu jednak je $\left(\frac{1+\eta}{2}\right)$. Iz toga slijedi da je funkcija oblika za čvor 7 jednaka

$$N_7 = \left(1-\xi^2\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right). \tag{13.53}$$

Na isti način određuje se funkcija oblika za čvor 5 s koordinatama $\xi = 0$, $\eta = -1$

$$N_5 = \left(1-\xi^2\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right). \tag{13.54}$$

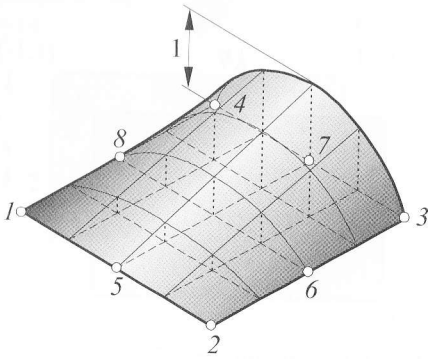
Relacije (13.53) i (13.54) moguće je kraće zapisati kao

$$N_i = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\eta_i\right), \tag{13.55}$$

gdje $\eta_i = \pm 1$ označuje položaj čvorova 7 i 5. Analogno je za čvorove 6 i 8 s koordinatama $\xi_i = \pm 1$, $\eta = 0$, izraz za funkcije oblika jednak

$$N_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2). \tag{13.56}$$

Funkcija oblika N_7 grafički je prikazana na slici 13.20.



Slika 13.20. Funkcija oblika N_7 za pravokutni serendipity element 2. reda

Određivanje funkcija oblika za čvorove u vrhovima pravokutnika prikazat će se izvođenjem funkcije oblika za čvor *4*. Od funkcije oblika koja se odnosi na čvor *4* osnovnoga pravokutnog elementa, a jednaka je prema (13.52) umnošku linearnih Lagrangeovih polinoma,

$$N_4' = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \tag{13.57}$$

potrebno je oduzeti funkcije oblika središnjih čvorova *7* i *8*, koje je potrebno pomnožiti s odgovarajućim faktorom tako da rezultirajuća funkcija u tim čvorovima bude jednaka nuli

$$N_4 = N_4' - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8. \tag{13.58}$$

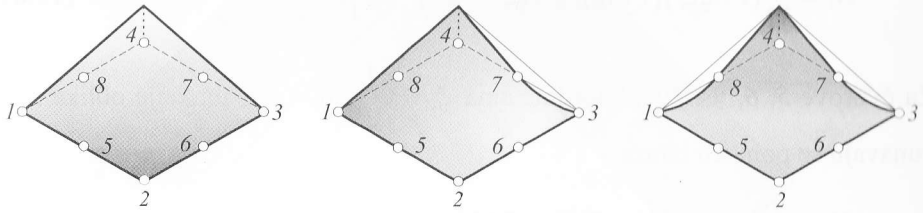
Nakon uvrštavanja (13.57), (13.53) te izraza za N_8 prema (13.56), izračunava se funkcija oblika

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1). \tag{13.59}$$

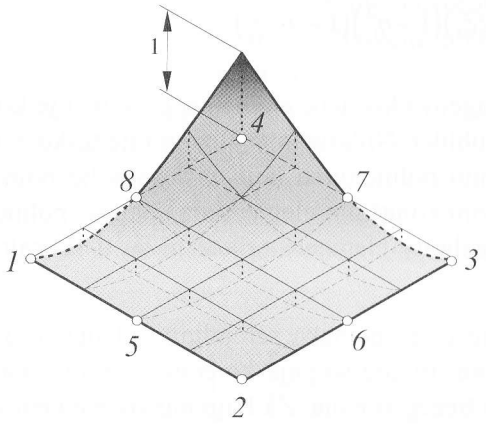
Poradi lakšeg razumijevanja, uz relaciju (13.58) priložene su skice na slici 13.21., koje grafički pokazuju izvođenje funkcije oblika N_4. Na isti način izvode se funkcije oblika za ostale čvorove u vrhovima pravokutnika, koje je moguće prikazati zajedničkom relacijom

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1), \tag{13.60}$$

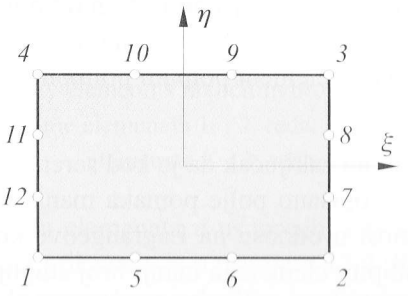
gdje su ξ_i i η_i koordinate čvorova. Funkcija oblika za čvor *4* još jednom je detaljnije prikazana na slici 13.22.



Slika 13.21. Grafički prikaz izvođenja funkcije oblika N_4



Slika 13.22. Funkcija oblika N_4 za pravokutni serendipity element 2. reda



Slika 13.23. Pravokutni serendipity element 3. reda

Analognim postupkom izvode se funkcije oblika za serendipity element 3. reda koji je prikazan na slici 13.23. Njihovo izvođenje ovdje se neće razmatrati, samo će se navesti gotove relacije. Funkcije oblika za čvorove *1* do *4* u vrhovima pravokutnika s koordinatama $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ jednake su

$$N_i = \frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\left[9\left(\xi^2+\eta^2\right)-10\right]. \tag{13.61}$$

Za čvorove *5*, *6*, *9* i *10* s koordinatama $\xi_i = \pm\frac{1}{3}$, $\eta_i = \pm 1$, funkcije oblika izračunavaju se pomoću izraza

$$N_i = \frac{9}{32}(1+\eta\eta_i)\left(1-\xi^2\right)(1+9\xi\xi_i), \tag{13.62}$$

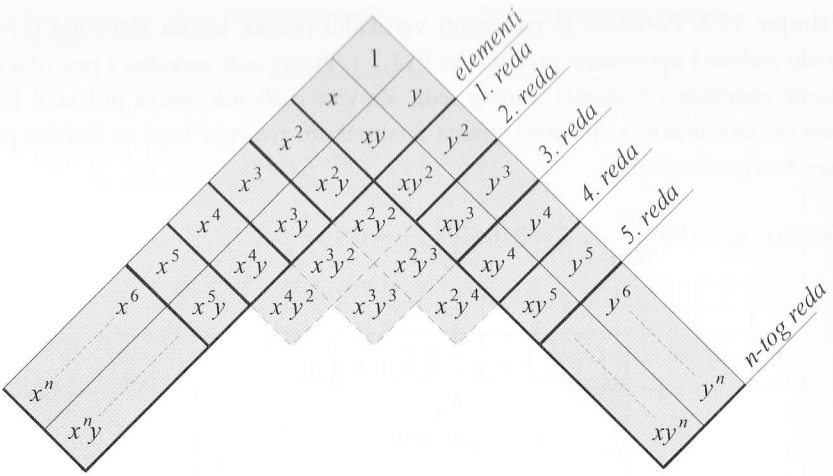
a za čvorove *7*, *8*, *11* i *12* s koordinatama $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm\frac{1}{3}$, vrijedi relacija

$$N_i = \frac{9}{32}(1+\xi\xi_i)\left(1-\eta^2\right)(1+9\eta\eta_i). \tag{13.63}$$

Isto kao i za Lagrangeove konačne elemente, potrebno je kritički se osvrnuti na prikazane funkcije oblika. Njihovom analizom nije teško zaključiti koji članovi odgovaraju pripadnim polinomima koji opisuju polje pomaka. U svrhu usporedbe s Lagrangeovim konačnim elementima, članovi polinoma funkcija pomaka za različite serendipity elemente prikazani su u Pascalovu trokutu na slici 13.24.

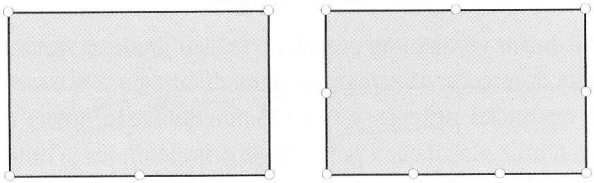
Lako je uočiti da je polje pomaka serendipity elementa drugog reda opisano potpunim polinomom drugog stupnja kojemu su pridodana još dva člana koja pripadaju polinomu trećeg stupnja. Za Lagrangeov element s istom raspodjelom pomaka duž rubova koji je opisan bikvadratnom interpolacijom, pripadna funkcija pomaka jednaka je potpunom polinomu drugog stupnja uz dva člana koja pripadaju polinomu trećeg stupnja i jedan je član od polinoma četvrtog stupnja. Za serendipity element trećeg reda dva člana narušavaju potpunost polinoma, a za odgovarajući Lagrangeov element potpuni polinom trećeg stupnja proširen je sa šest članova.

Prikazana analiza navodi na zaključak da je kod serendipity elemenata nepotpunost polinoma kojima je opisano polje pomaka manja nego kod Lagrangeovih elemenata, što je prednost u odnosu na Lagrangeove konačne elemente. Osim toga, prednost je serendipity elemenata manji broj stupnjeva slobode uz istu raspodjelu pomaka duž rubova elementa. Njihov je nedostatak složeniji postupak izvođenja funkcija oblika nego što je slučaj za Lagrangeove konačne elemente.



Slika 13.24. Prikaz članova u Pascalovu trokutu koji odgovaraju različitim serendipity elementima

Osim prikazanih serendipity elemenata s istim brojem čvorova duž stranica pravokutnika, na jednak je način moguće izvesti funkcije oblika za konačne elemente kojima je duž stranica broj čvorova različit, slika 13.25. Elementi s različitim brojem čvorova duž stranica primjenjuju se pri prijelazu s jednog tipa elemenata na drugi, tj. omogućuju spajanje elemenata nižeg reda s elementima višeg reda. Element koji omogućuje spajanje osnovnoga pravokutnog elementa sa serendipity elementom drugog reda prikazan je na slici 13.25a, a na slici 13.25b element je pomoću kojega je moguće spojiti mrežu elemenata 2. reda s elementima trećeg reda.



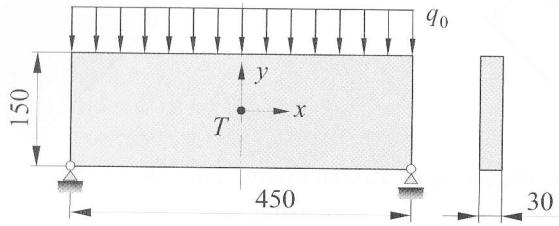
a) *b)*

Slika 13.25. Serendipity elementi s različitim brojem čvorova duž stranica: a) element za spajanje elemenata 1. i 2. reda, b) element za spajanje elemenata 2. i 3. reda

Konvergencija pravokutnih elemenata u usporedbi s rješenjima dobivenim pomoću trokutnih elemenata prikazana je u primjeru 13.2. Razmatrano je savijanje slobodno oslonjene grede opterećene jednoliko kontinuirano.

Primjer 13.2. Potrebno je izračunati vertikalni pomak težišta slobodno oslonjene grede zadane i opterećene prema slici P13.2.1. Primijeniti trokutne i pravokutne osnovne elemente i elemente drugog reda. Za više različitih mreža prikazati konvergenciju izračunatih vrijednosti prema analitičkom rješenju koje se dobiva primjenom teorije elastičnosti.

Zadano: $q_0 = 100 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$, $\nu = 0.3$.

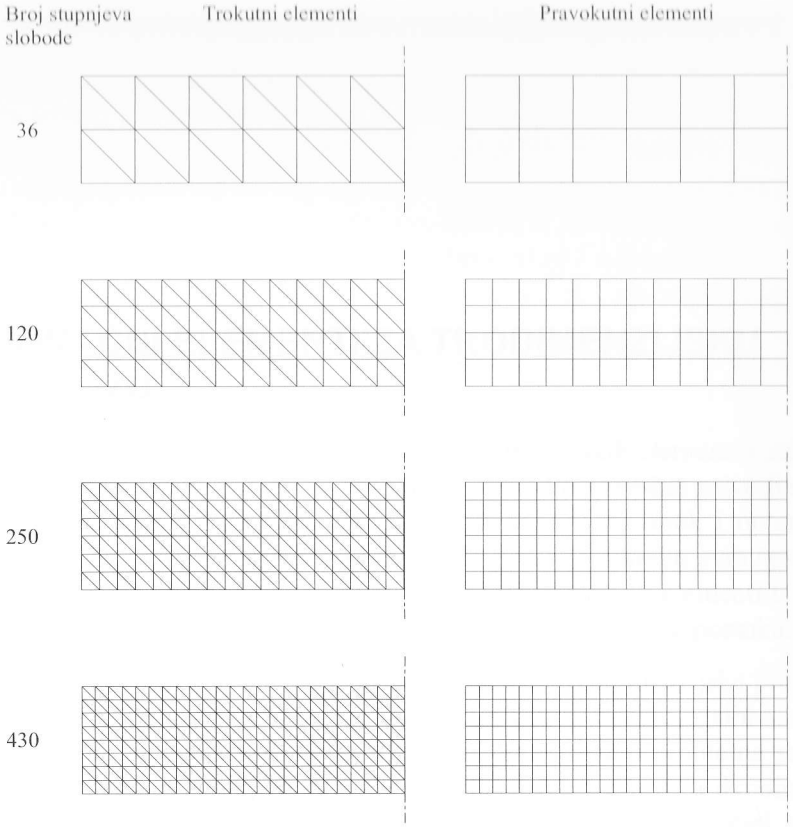


Slika P13.2.1. Greda opterećena jednoliko kontinuirano

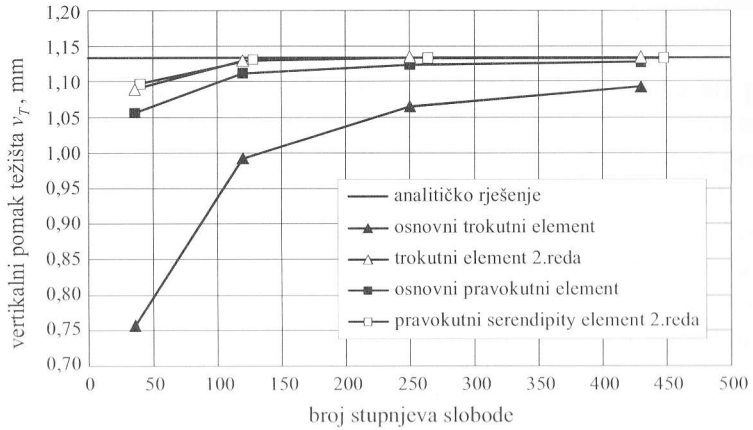
Budući da je problem simetričan, razmatrana je jedna polovina grede pri čemu su horizontalni pomaci u čvorovima duž osi simetrije izjednačeni s nulom. U skladu sa zadanim osloncima, u rubnim uvjetima obuhvaćeni su i svi čvorovi duž vertikalnog ruba, gdje su sve vertikalne komponente pomaka jednake nuli. Proračunski model je diskretiziran s trokutnim i pravokutnim elementima. Primijenjeni su osnovni trokutni elementi i trokutni elementi drugog reda sa 6 čvorova te osnovni pravokutni elementi i pravokutni serendipity elementi drugog reda s 8 čvorova. Na slici P13.2.2. prikazane su mreže osnovnih trokutnih i pravokutnih elemenata, a diskretizacija sa spomenutim elementima višega reda je analogna.

Izračunate vrijednosti vertikalnog pomaka u težištu grede za mreže osnovnih elemenata i elemenata drugoga reda prikazane su na dijagramu. Na istom dijagramu označeno je točno analitičko rješenje $v_T = 1{,}133$ mm dobiveno prema teoriji elastičnosti [110]. Relacije teorije elastičnosti potrebno je primijeniti jer je omjer visine i duljine grede jednak 1/3, što znači da približne relacije prema Bernoullijevoj teoriji savijanja grede nisu dovoljno točne.

Na temelju prikazanih rezultata nije teško zaključiti kako su rješenja dobivena pomoću elemenata drugog reda bliže točnim vrijednostima od rješenja dobivenih s osnovnim elementima. Rješenja dobivena osnovnim pravokutnim elementima znatno su bolja od rezultata dobivenih pomoću osnovnih trokutnih elemenata. Pri primjeni elemenata drugog reda nema znatnih razlika između vrijednosti dobivenih pomoću trokutnih i pravokutnih elemenata. Njihova je konvergencija za razmatrani problem jednako dobra.



Slika P13.2.2. Mreže s osnovnim trokutnim i pravokutnim elementima



Slika P13.2.3. Konvergencija rješenja dobivenih s osnovnim elementima i elementima drugog reda

14. KONAČNI ELEMENTI ZA TRODIMENZIJSKU ANALIZU

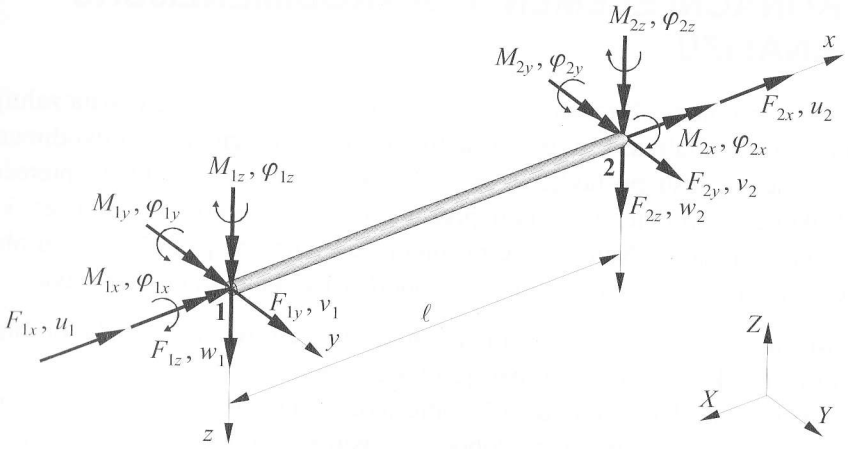
Rješavanje problema čvrstoće za velik broj konstrukcijskih elemenata zahtijeva trodimenzijsku analizu. Pritom, za razliku od jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema, nisu postavljena ograničenja u odnosu na oblik i opterećenje konstrukcije. Za procjenu stanja naprezanja potrebno je odrediti svih šest komponenata naprezanja. Najčešće se primjenjuju trodimenzijski elementi u obliku tetraedra i paralelopipeda, a stupnjevi slobode tri su komponente pomaka.

Za postizanje iste točnosti kao za jednodimenzijske i dvodimenzijske probleme, u trodimenzijskoj analizi potreban je mnogo veći broj stupnjeva slobode. Ako mreža konačnih elemenata za rješavanje jednodimenzijskih problema sadrži n čvorova s po jednim stupnjem slobode, za istu razinu točnosti u dvodimenzijskoj analizi potrebno je n^2 čvorova s po dva stupnja slobode što čini ukupno $2n^2$ stupnjeva slobode. Za istu točnost u trodimenzijskoj analizi potrebno je n^3 čvorova s po tri stupnja slobode što daje ukupan broj stupnjeva slobode $3n^3$. Nije teško zaključiti da pri rješavanju prostornih problema valja računati sa znatno većim brojem nepoznanica u globalnoj jednadžbi konačnih elemenata, što znatno povećava vrijeme računanja.

Uz gore spomenute trodimenzijske elemente, ovdje će se prikazati prostorni gredni element s po šest stupnjeva slobode u čvorovima. Uz osnovni tetraedarski i prizmatični element, prikazat će se elementi višeg reda izvedeni primjenom Lagrangeovih interpolacijskih polinoma te prizmatični serendipity elementi. Za razliku od dvodimenzijskih problema, u kojima je potrebno ostvariti kontinuitet pomaka duž stranica elementa, u trodimenzijskoj analizi potrebno je zadovoljiti kontinuitet pomaka na plohama susjednih elemenata. Na taj način, raspodjela pomaka duž ploha mora se jednoznačno opisati veličinama u pripadnim čvorovima.

14.1. Prostorni gredni element

Za analizu prostornih rešetkastih i okvirnih konstrukcija neophodni su prostorni gredni elementi. Prostorni gredni element je jednodimenzijski gredni element proizvoljno orijentiran u trodimenzijskom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Za element je obično vezan lokalni koordinatni sustav pri čemu je jedna os duž elementa, a druge dvije su u ravnini poprečnog presjeka. Stupnjevi slobode su tri komponente pomaka i kutovi zakreta u lokalnom koordinatnom sustavu kojima su pridružene sile i momenti prema slici 14.1.



Slika 14.1. Prostorni gredni konačni element

Matricu krutosti moguće je izvesti superpozicijom matrica krutosti za različito opterećene jednodimenzijske elemente, koje su prikazane u 12. poglavlju. Pritom se pretpostavlja da su osi y i z lokalnoga koordinatnog sustava koje leže u ravnini presjeka ujedno i glavne osi tromosti, a težište poprečnog presjeka poklapa se s centrom smicanja. Na taj način poprečne sile mogu izazvati samo savijanje, tj. poradi njihova djelovanja ne može doći do uvijanja grednog elementa.

Pomoću članova matrice krutosti osno opterećenog osnovnoga štapnog elementa (12.3), izraza (12.18) za matricu krutosti štapnog elementa opterećenog na uvijanje, relacije (12.38) za matricu krutosti osnovnoga grednog elementa za slučaj savijanja oko osi y, te analognog izraza kad je savijanje oko osi z, izvodi se rezultirajuća matrica krutosti za prikazani prostorni gredni element. Pritom je prikladno članove pojedinih matrica poredati tako da odgovaraju vektoru stupnjeva slobode u kojemu se prvih šest članova odnosi na prvi čvor, a ostali su članovi pridruženi drugom čvoru konačnog elementa

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} & u_2 & v_2 & w_2 & \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z} \end{bmatrix}. \quad (14.1)$$

Pripadna rezultirajuća matrica krutosti prikazana je relacijom:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12\frac{EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} \\
0 & 0 & 12\frac{EI_y}{\ell^3} & 0 & -6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{\ell} & 0 \\
0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_z}{\ell} & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_z}{\ell} \\
-\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -12\frac{EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} \\
0 & 0 & -12\frac{EI_y}{\ell^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{\ell^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{\ell^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{\ell} & 0 \\
0 & 6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_z}{\ell} & 0 & -6\frac{EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_z}{\ell}
\end{bmatrix} \tag{14.2}$$

Budući da su prostorni gredni elementi proizvoljno orijentirani u globalnom koordinatnom sustavu, za izvođenje globalne jednadžbe konačnih elemenata potrebno je provesti transformaciju stupnjeva slobode. Transformacija pomaka provodi se prema relaciji (8.31), a kutovi zakreta transformiraju se pomoću analognih relacija uz nepromijenjenu matricu transformacije. Izrazi za transformaciju vektora sila i momenata te za izračunavanje matrice krutosti u odnosu na globalni koordinatni sustav, prikazani su u odjeljku 8.2.2. Pritom je matrica transformacije za prikazani prostorni gredni element s 12 stupnjeva slobode jednaka

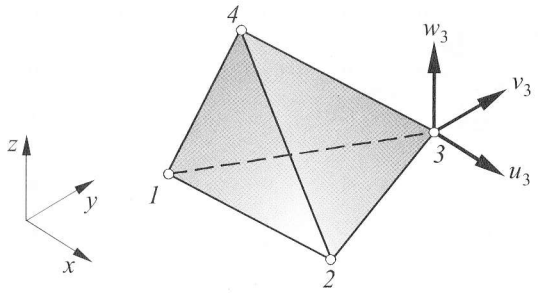
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix}, \tag{14.3}$$

gdje su $\mathbf{T}_1 \ldots \mathbf{T}_4$ jednake kvadratne submatrice trećeg reda čiji su članovi kosinusi smjera prikazani u (8.31).

14.2. Osnovni tetraedarski element

Najjednostavniji konačni element za trodimenzijsku analizu kontinuuma osnovni je tetraedarski element s 12 stupnjeva slobode, slika 14.2. Element se sastoji od 4 čvora u vrhovima tetraedra s po tri komponente pomaka, u, v i w, u pravcu Kartezijevih koordinatnih osi. Redoslijed numeriranja čvorova jednak je kao i u odjeljku 10.3., što znači ako se promatra iz čvora *4*, čvorovi s brojevima *1*, *2* i *3* u vrhovima nasuprotne stranice poredani su u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu. Stupnjevi su slobode komponente pomaka u čvorovima

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 & u_4 & v_4 & w_4 \end{bmatrix}. \tag{14.4}$$



Slika 14.2. Osnovni tetraedarski konačni element

Raspodjela pomaka u elementu opisana je potpunim polinomima prvog stupnja

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z, \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z, \\ w &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Kao što je uobičajeno, izrazi (14.5) prikazuju se u matričnom zapisu

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}: \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix}. \tag{14.6}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta $u = u_i$, $v = v_i$, $w = w_i$ za čvorove određene koordinatama $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$, gdje je $i = 1$ do 4, pomoću (14.6) dobiva se

$$\mathbf{v}=\mathbf{C}\,\mathbf{a}:\quad \begin{bmatrix} u_1\\ v_1\\ w_1\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\\ \vdots\\ a_{12} \end{bmatrix}. \tag{14.7}$$

Matrica funkcija oblika jednaka je

$$\mathbf{N}=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \tag{14.8}$$

Funkcije oblika moguće je skraćeno zapisati analogno relacijama za osnovni trokutni element

$$N_i=\frac{1}{6V}\left(\alpha_i+x\beta_i+y\gamma_i+z\delta_i\right),\qquad i=1,2,3,4, \tag{14.9}$$

gdje je V volumen tetraedra

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{14.10}$$

a za $i=1$ koeficijenti α_1, β_1, γ_1 i δ_1 jednaki su

$$\alpha_1=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},\quad \beta_1=-\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2\\ 1 & y_3 & z_3\\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_1=-\begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2\\ x_3 & 1 & z_3\\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix},\quad \delta_1=-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}, \tag{14.11}$$

Ostali koeficijenti za i = 2, 3, 4 dobivaju se pomoću analognih izraza uz ciklič-ku zamjenu indeksa 1, 2, 3 i 4. Relacija (14.9) pokazuje linearnu raspodjelu funkcija oblika. Nije teško provjeriti da je njihov iznos u čvorovima na koje se

odnose jednak jedinici, a u ostalim čvorovima jednake su nuli, što je u skladu s već opisanim svojstvom funkcija oblika. Također je lako pokazati da je raspodjela pomaka po plohama tetraedra linearna. Budući da je linearnu raspodjelu komponenata pomaka moguće jednoznačno opisati s pripadna tri stupnja slobode u čvorovima na vrhovima ploha, lako je zaključiti da je kompatibilnost pomaka po plohama zadovoljena te da opisani element pripada u grupu konformnih elemenata. Osim toga, zadovoljena su i ostala dva uvjeta za monotonu konvergenciju rješenja kao što je mogućnost opisivanja pomaka krutog tijela i polja konstantnih deformacija. Korisno je uočiti da su funkcije oblika (14.9) jednake izrazima za prirodne volumenske koordinate (10.28).

Deriviranjem funkcija oblika uz primjenu kinematičkoga diferencijalnog operatora $\mathbf{D}_k$ prema (3.15), izračunava se matrica $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 0 & \gamma_2 & \beta_2 & 0 & \gamma_3 & \beta_3 & 0 & \gamma_4 & \beta_4 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_2 & \gamma_2 & 0 & \delta_3 & \gamma_3 & 0 & \delta_4 & \gamma_4 \\ \delta_1 & 0 & \beta_1 & \delta_2 & 0 & \beta_2 & \delta_3 & 0 & \beta_3 & \delta_4 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix}, \quad (14.12)$$

koja pokazuje da su komponente tenzora deformacije u osnovnom tetraedarskom konačnom elementu konstantne. Na temelju umnoška matrice elastičnosti za trodimenzijsko stanje naprezanja (3.26) i matrice $\mathbf{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{DB}$, lako je zaključiti da je polje naprezanja u elementu također konstantno

$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{S}_3 & \mathbf{S}_4 \end{bmatrix}. \quad (14.13)$$

Submatrice $\mathbf{S}_1 \ldots \mathbf{S}_4$ prikazane su sljedećom relacijom za $i = 1 \ldots 4$:

$$\mathbf{S}_i = \frac{E}{6(1+\nu)(1-2\nu)V} \begin{bmatrix} \beta_i(1-\nu) & \gamma_i\nu & \delta_i\nu \\ \beta_i\nu & \gamma_i(1-\nu) & \delta_i\nu \\ \beta_i\nu & \gamma_i\nu & \delta_i(1-\nu) \\ \frac{\gamma_i}{2}(1-2\nu) & \frac{\beta_i}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & \frac{\delta_i}{2}(1-2\nu) & \frac{\gamma_i}{2}(1-2\nu) \\ \frac{\delta_i}{2}(1-2\nu) & 0 & \frac{\beta_i}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}. \quad (14.14)$$

Matrica krutosti izračunava se pomoću izraza

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}V\,. \tag{14.15}$$

Budući da su za prikazani tetraedarski element podintegralne matrice konstantne, izraz za izračunavanje matrice krutosti može se napisati u jednostavnijem obliku

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}V = \mathbf{B}^T \mathbf{S}V. \tag{14.16}$$

Množenje matrica (14.12) i (14.13) u svrhu eksplicitnog prikaza članova matrice krutosti ovdje se neće provoditi. Mnogo jednostavnije je provesti množenje numerički primjenom računala.

Ako u elementu djeluje polje početnih deformacija, sile u čvorovima određuju se pomoću izraza (8.16). Za slučaj kada djeluju volumenske sile i površinsko opterećenje, za izračunavanje sila u čvorovima primjenjuju se relacije (8.17) i (8.18). Za izračunavanje sila u čvorovima poradi volumenskih sila, korisno je središte Kartezijeva koordinatnog sustava postaviti u težište tetraedra. U tom slučaju, u svrhu jednostavnijeg izračunavanja, moguće je iskoristiti sljedeće jednakosti:

$$\int_V x\,\mathrm{d}V = \int_V y\,\mathrm{d}V = \int_V z\,\mathrm{d}V = 0\,,$$

$$\frac{x_i + x_j + x_k + x_l}{4} = \frac{y_i + y_j + y_k + y_l}{4} = \frac{z_i + z_j + z_k + z_l}{4} = 0\,.$$

Prvi član α_i u izrazima za funkcije oblika (14.9) jednak je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{6V}{4}\,.$$

Ako u elementu djeluju konstantne volumenske sile $\mathbf{q}_0^T = \begin{bmatrix} q_{0x} & q_{0y} & q_{0z} \end{bmatrix}$, pomoću relacije (8.17) lako je pokazati da su sile u čvorovima jednake

$$\mathbf{F}_V^T = \frac{V}{4}\begin{bmatrix} q_{0x} & q_{0y} & q_{0z} & q_{0x} & q_{0y} & q_{0z} & q_{0x} & q_{0y} & q_{0z} & q_{0x} & q_{0y} & q_{0z} \end{bmatrix} \tag{14.17}$$

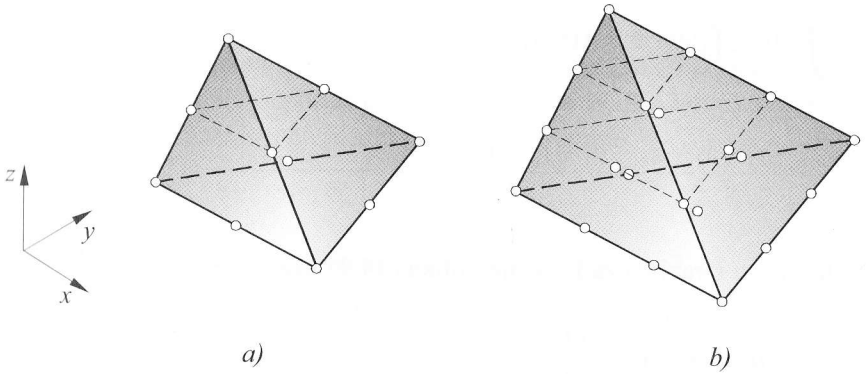
Kao što se moglo očekivati, izraz (14.17) pokazuje da su sile u čvorovima tetraedra raspodijeljene u jednakim iznosima.

14.3. Tetraedarski elementi višeg reda

Dodavanjem čvorova osnovnom tetraedarskom elementu, izvode se tetraedarski elementi višeg reda. Pritom je poželjno da polinomi funkcija pomaka budu potpuni. Pomoću potpunog polinoma drugog stupnja opisano je polje pomaka u tetraedarskom konačnom elementu drugog reda s 10 čvorova i 30 stupnjeva slobode, slika 14.3a. Komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu jednake su

$$
\begin{aligned}
u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz, \\
v &= a_{11} + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z + a_{15}x^2 + a_{16}y^2 + a_{17}z^2 + a_{18}xy + a_{19}yz + a_{20}xz, \\
w &= a_{21} + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z + a_{25}x^2 + a_{26}y^2 + a_{27}z^2 + a_{28}xy + a_{29}yz + a_{30}xz.
\end{aligned}
\tag{14.18}
$$

Polazeći od prikazanih funkcija pomaka, funkcije oblika izvode se na isti način kao i kod osnovnoga tetraedarskog elementa. Za element trećeg reda s 20 čvorova i 60 stupnjeva slobode, prema slici 14.3b, funkcije pomaka su potpuni polinomi trećeg stupnja, čije je članove jednostavno očitati iz Pascalova tetraedra na slici 9.2. Lako je uočiti kako položaj čvorova u tetraedarskom konačnom elementu odgovara položaju članova odgovarajućih polinoma u Pascalovu tetraedru.



a) *b)*

Slika 14.3. Tetraedarski elementi višeg reda: a) element drugog reda, b) element trećeg reda

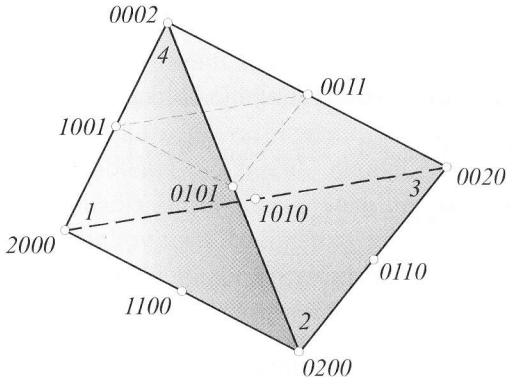
Budući da kinematički diferencijalni operator (3.15) za izračunavanje matrice **B** sadrži samo prve derivacije, red funkcija koje opisuju raspodjelu deformacije za jedan je niži od reda funkcija raspodjele pomaka. Na taj način, tetraedarski element drugog reda može opisati linearno polje deformacija, a ako je element trećeg reda, polje deformacija je kvadratna funkcija. Funkcije raspodjele naprezanja istog su reda kao i funkcije raspodjele deformacija. Za prikazane tetraedarske elemente zadovoljeni su svi potrebni uvjeti konvergencije.

Isto kao i za trokutne elemente višeg reda i tu je moguće primijeniti prirodne koordinate za direktno određivanje funkcija oblika. Primjenjuju se volumenske ili tetraedarske koordinate koje su detaljno opisane u odjeljku 10.3. Analogno dvodimenzijskim problemima, za izvođenje funkcija oblika rabi se numeriranje čvorova s četiri znamenke koje se povećavaju od nule do maksimalnog iznosa u vrhovima tetraedra. Tako, na primjer, prva znamenka jednaka je nuli u čvorovima koji se nalaze na plohi za koju je koordinata $L_1 = 0$ te raste do maksimalne vrijednosti koja je pridružena čvoru u vrhu tetraedra nasuprot te plohe. Druga znamenka jednaka je nuli u čvorovima koji su na plohi za koju je $L_2 = 0$ i povećava se do maksimalnog iznosa u nasuprotnom vrhu. Analogno vrijedi za ostale znamenke. Svi čvorovi leže u jednako razmaknutim ravninama koje su paralelne s plohama tetraedra. Ako je čvor označen s četiri znamenke $k\ell mp$, njemu pridružena funkcija oblika jednaka je

$$N_{k\ell mp}(L_1, L_2, L_3, L_4) = N_k(L_1)\, N_\ell(L_2)\, N_m(L_3) N_p(L_4), \tag{14.19}$$

gdje su L_i $(i = 1,2,3,4)$ volumenske ili tetraedarske koordinate opisane relacijom (10.28), a funkcije $N_k(L_1)$, $N_\ell(L_2)$, $N_m(L_3)$ i $N_p(L_4)$ određuju se pomoću relacije (12.49). Zbroj indeksa određuje red funkcija oblika, $n = k + l + m + p$, a jednak je maksimalnom iznosu znamenki u vrhovima tetraedra.

Ovdje će se prikazati izvođenje funkcija oblika u prirodnim koordinatama za tetraedarski konačni element 2. reda, prikazan na slici 14.3a. Primjenjujući gore opisani postupak, njegovim čvorovima pridružuju se znamenke prema slici 14.4.



Slika 14.4. Numeriranje čvorova za izvođenje funkcija oblika u prirodnim volumenskim koordinatama

Funkcija oblika za čvor *1*, koji je označen s *2000*, prema relaciji (14.19), jednaka je

$$N_{2000}(L_1,L_2,L_3,L_4)=N_2(L_1)\,N_0(L_2)\,N_0(L_3)N_0(L_4). \tag{14.20}$$

Prema relaciji (12.49), $N_2(L_1)$ izračunava se pomoću sljedećeg izraza:

$$N_2(L_1)=\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{2L_1-i+1}{i}\right)=\frac{2L_1-1+1}{1}\,\frac{2L_1-2+1}{2}=L_1(2L_1-1), \tag{14.21}$$

a ostali članovi jednaki su $N_0(L_2)=N_0(L_3)=N_0(L_4)=1$. Prema tome, funkcija oblika N_{2000} jednaka je

$$N_{2000}=L_1(2L_1-1). \tag{14.22}$$

Analogno se izračunavaju funkcije oblika za ostale čvorove u vrhovima tetraedra:

$$\begin{aligned} N_{0200}&=L_2(2L_2-1),\\ N_{0020}&=L_3(2L_3-1),\\ N_{0002}&=L_4(2L_4-1). \end{aligned} \tag{14.23}$$

Za čvor između vrhova *1* i *2*, funkcija oblika je

$$N_{1100}(L_1,L_2,L_3,L_4)=N_1(L_1)\,N_1(L_2)\,N_0(L_3)N_0(L_4), \tag{14.24}$$

gdje je prema (12.49), $N_1(L_1)=2L_1$, $N_1(L_2)=2L_2$, $N_0(L_3)=N_0(L_4)=1$. Na taj način, funkcija oblika N_{1100} jednaka je

$$N_{1100}=4L_1L_2. \tag{14.25}$$

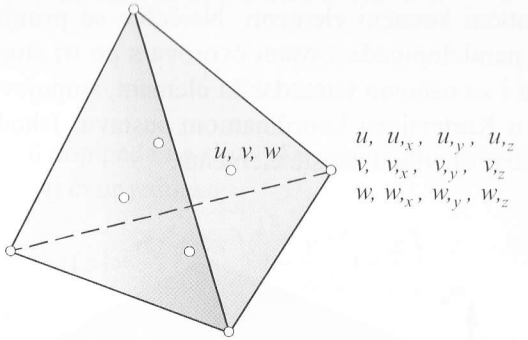
Na isti način izračunavaju se ostale funkcije oblika:

$$\begin{aligned} &N_{0110}=4L_2L_3,\quad N_{1010}=4L_1L_3,\quad N_{1001}=4L_1L_4,\\ &N_{0101}=4L_2L_4,\quad N_{0011}=4L_3L_4. \end{aligned} \tag{14.26}$$

Na analogan način, nije teško izvesti funkcije oblika i za element trećeg reda prema slici 14.3b.

I ovdje kao i u ravninskim problemima, elemente višeg reda moguće je izvesti uvođenjem derivacija komponenata pomaka umjesto povećanja broja čvorova. Elemente višeg reda, čiji su stupnjevi slobode derivacije komponenata pomaka, zgodno je prikazati na primjeru konačnog elementa trećeg reda s kubnim polinomom funkcije pomaka. Umjesto elementa prema slici 14.3b, s 20 čvorova s po tri stupnja slobode, moguće je izvesti konačni element s 4 čvora u vrhovima tetraedra s po 12 stupnjeva slobode i s 4 čvora na plohama tetraedra s po tri stu-

pnja slobode, prema slici 14.5. Pritom su broj stupnjeva slobode konačnog elementa i stupanj polinoma funkcije pomaka ostali nepromijenjeni.



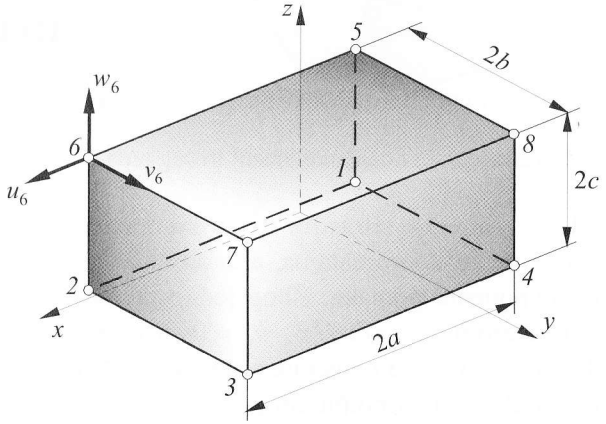
Slika 14.5. Tetraedarski konačni element trećeg reda s osam čvorova

Stupnjevi slobode u vrhovima tetraedra tri su komponente pomaka i njihove derivacije po Kartezijevim koordinatama, a čvorovima na plohama pridružene su samo po tri komponente pomaka. Zbog jednostavnosti, derivacije na slici 14.5. označene su zarezom ($u_{,x} = \partial u / \partial x$, $u_{,y} = \partial u / \partial y$, $u_{,z} = \partial u / \partial z$ ...). Čvorovi u težištu ploha potrebni su za očuvanje potpunosti polinoma funkcije pomaka. Osim opisanoga elementa s potpunim polinomom 3. stupnja, za rješavanje trodimenzijskih problema često se rabi tetraedarski element bez čvorova po plohama. Na taj način, stupnjevi slobode elementa samo su komponente pomaka s derivacijama u vrhovima tetraedra što čini ukupno 48 stupnjeva slobode. Komponente pomaka opisane su nepotpunim polinomima trećeg stupnja, što je nedostatak tog elementa.

Prednosti elemenata s koncentriranim stupnjevima slobode u čvorovima uvođenjem derivacija, u odnosu na povećavanje broja čvorova, znatno su više izražene za trodimenzijske elemente nego za elemente za rješavanje jednodimenzijskih i dvodimenzijskih problema. Smanjenje ukupnog broja stupnjeva slobode proračunskog modela te manja širina pojasa globalne matrice krutosti pridonosi poboljšanju numeričke učinkovitosti trodimenzijskih elemenata čiji su stupnjevi slobode derivacije pomaka. Uz to je potrebno napomenuti da izjednačivanje derivacija komponenata pomaka u čvorovima susjednih elemenata fizikalno predstavlja izjednačivanje deformacija, što dovodi do poteškoća u slučaju kad je proračunski model tako opterećen da na tim mjestima dolazi do promjene deformacija.

14.4. Osnovni prizmatični elementi

Osim tetraedarskih konačnih elemenata, veliku primjenu za trodimenzijsku analizu imaju prizmatični konačni elementi. Najčešće se primjenjuje prizmatični element u obliku paralelopipeda s osam čvorova s po tri stupnja slobode, slika 14.6. Jednako kao i za osnovni tetraedarski element, stupnjevi slobode su komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu. Ishodište koordinatnog sustava najčešće se postavlja u težište elementa.



Slika 14.6. Osnovni prizmatični element s 24 stupnja slobode

Raspodjela pomaka opisana je nepotpunim polinomima trećeg stupnja

$$
\begin{aligned}
u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz,\\
v &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}xy + a_{14}yz + a_{15}zx + a_{16}xyz,\\
w &= a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}z + a_{21}xy + a_{22}yz + a_{23}zx + a_{24}xyz.
\end{aligned}
\tag{14.27}
$$

Ovakva raspodjela pomaka omogućuje zadovoljavanje svih potrebnih kriterija za monotonu konvergenciju rješenja. Matricu funkcija oblika moguće je izvesti kao i kod osnovnog tetraedarskog elementa na način koji je opisan u odjeljku 14.2. Uvrštavanjem rubnih uvjeta za čvorove, pomoću (14.27) izvodi se kvadratna matrica **C** čiji je red jednak broju stupnjeva slobode elementa. Za određivanje funkcija oblika potrebno je odrediti njezinu inverznu matricu, što upućuje na složenost postupka izračunavanja.

Mnogo je jednostavnije funkcije oblika izvesti pomoću jednodimenzijskih Lagrangeovih polinoma na način koji je analogan određivanju funkcija oblika za dvodimenzijske pravokutne konačne elemenata. Za razliku od dvodimenzijskih problema, tu su funkcije oblika jednake umnošku linearnih jednodimenzijskih polinoma u pravcu tri koordinatne osi. Za koordinatni sustav i dimenzije ele-

menta prema slici 14.6., Lagrangeovi polinomi za pravac osi x i y jednaki su izrazima (13.40) i (13.41) za pravokutni konačni element. Analogno su Lagrangeovi polinomi za pravac osi z za koordinate čvorova $z_1 = -c$ i $z_2 = c$ jednaki

$$l_1(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right), \qquad l_2(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right). \tag{14.28}$$

Sada su čvoru *1* paralelopipeda na slici 14.6. pridružene koordinate x_1, y_1, z_1, pa je funkcija oblika za taj čvor jednaka

$$N_1 = l_1(x)\, l_1(y) l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right). \tag{14.29}$$

Čvor *2* određen je koordinatama x_2, y_1, z_1, što određuje funkciju oblika

$$N_2 = l_2(x)\, l_1(y) l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right). \tag{14.30}$$

Analogno se izračunavaju funkcije oblika za ostale čvorove

$$N_3 = l_2(x)\, l_2(y) l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right),$$

$$N_4 = l_1(x)\, l_2(y) l_1(z) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right),$$

$$N_5 = l_1(x)\, l_1(y) l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right),$$

$$N_6 = l_2(x)\, l_1(y) l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right), \tag{14.31}$$

$$N_7 = l_2(x)\, l_2(y) l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right),$$

$$N_8 = l_1(x)\, l_2(y) l_2(z) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{z}{c}\right).$$

Uvođenjem prirodnih koordinata $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$ i $\zeta = \frac{z}{c}$, ove funkcije oblika moguće je kraće zapisati

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i), \qquad i=1\ldots8, \tag{14.32}$$

gdje su ξ_i, η_i, ζ_i koordinate čvorova. Ako je vektor stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8], \tag{14.33}$$

matrica funkcija oblika jednaka je

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \tag{14.34}$$

Matrica **B** određuje se deriviranjem funkcija oblika prema relaciji $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator (3.15). Matrica raspodjele naprezanja jednaka je produktu matrice elastičnosti (3.26) i matrice **B**, $\mathbf{S} = \mathbf{DB}$. Nakon deriviranja funkcija oblika, lako je zaključiti da je raspodjela deformacije u konačnom elementu linearna, što uvjetuje i linearnu raspodjelu naprezanja. Matrica krutosti izračunava se pomoću sljedeće relacije:

$$\mathbf{k} = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \mathbf{B}^T\mathbf{DB}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,. \tag{14.35}$$

Kad u elementu djeluje polje početnih deformacija, te u slučaju kada djeluju volumenske sile i površinsko opterećenje, sile u čvorovima izračunavaju se pomoću relacija (8.16), (8.17) i (8.18). Izračunavanje čvornih sila kada djeluje vanjsko površinsko opterećenje duž jedne plohe elementa prikazat će se za prizmatični element drugog reda u odjeljku 14.5.2.

Za rješavanje prostornih problema često se primjenjuje također jednostavni trodimenzijski konačni element u obliku trostrane prizme sa 6 čvorova s po 3 stupnja slobode, slika 14.7. Taj element moguće je kombinirati s paralelopipedima, a najčešće se primjenjuje kad je potrebno opisati složene geometrijske oblike sa zakrivljenim plohama. Komponente pomaka opisane su nepotpunim polinomima drugog stupnja

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xz + a_6yz, \\ v &= a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}z + a_{11}xz + a_{12}yz, \\ w &= a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}z + a_{17}xz + a_{18}yz, \end{aligned} \tag{14.36}$$

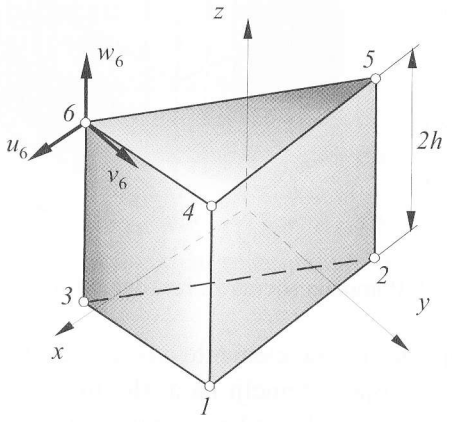
koji omogućuju monotonu konvergenciju rješenja. Kartezijev koordinatni sustav najčešće se postavlja u težište elementa. Jednako kao i kod paralelopipeda, funkcije oblika moguće je izvesti polazeći od polinoma funkcija pomaka uz

postavljanje rubnih uvjeta i izračunavanje i invertiranje matrice **C**. Mnogo je jednostavniji način određivanja funkcija oblika množenjem interpolacijskih funkcija u površinskim koordinatama za trokutni presjek i Lagrangeovih linearnih polinoma u pravcu osi z. Na taj način, funkcije oblika za čvorove prema slici 14.7. s koordinatama $z_1 = -h$ i $z_2 = h$ jednake su

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1\left(1-\frac{z}{h}\right), \quad N_2 = \frac{1}{2}L_2\left(1-\frac{z}{h}\right), \quad N_3 = \frac{1}{2}L_3\left(1-\frac{z}{h}\right),$$

$$N_4 = \frac{1}{2}L_1\left(1+\frac{z}{h}\right), \quad N_5 = \frac{1}{2}L_2\left(1+\frac{z}{h}\right), \quad N_6 = \frac{1}{2}L_3\left(1+\frac{z}{h}\right), \qquad (14.37)$$

gdje su L_1, L_2 i L_3 površinske ili trokutne koordinate koje su detaljno opisane u odjeljku 10.2. Deriviranjem funkcija oblika na način koji je već opisan, izvodi se matrica **B** koja opisuje linearno polje deformacije te je na taj način i raspodjela naprezanja također linearna, što je prednost u odnosu na osnovni tetraedarski element. Nedostatak je, kao i kod paralelopipeda, nepotpunost polinoma funkcije pomaka. Primjenom interpolacijskih funkcija višeg reda analogno dvodimenzijskim problemima, moguće je izvesti i prizmatične elemente višeg reda pomoću kojih se postiže složenija raspodjela deformacije i naprezanja.

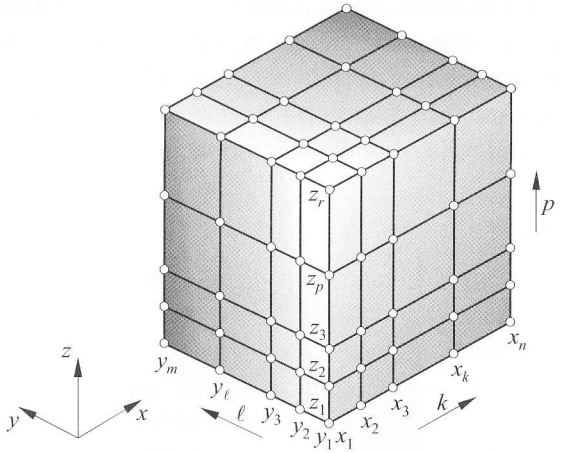


Slika 14.7. Prizmatični element s 18 stupnjeva slobode

14.5. Prizmatični elementi višeg reda

14.5.1. Primjena Lagrangeovih interpolacijskih polinoma

Izvođenje funkcija oblika za trodimenzijske konačne elemente višeg reda u obliku paralelopipeda analogno je postupku koji je opisan u odjeljku 13.4.1. za pravokutne konačne elemente. Umjesto dvostrukog produkta Lagrangeovih jednodimenzijskih polinoma u pravcu koordinatnih osi x i y, sada se primjenjuje njihov trostruki produkt u pravcu koordinata x, y i z. Stupanj Lagrangeovih polinoma ovisi o broju čvorova u pravcu spomenutih osi. I ovdje je koordinatni sustav korisno postaviti u težište paralelopipeda, a uz Kartezijeve često se koriste i prirodne bezdimenzijske koordinate. U prethodnom odjeljku pokazana je primjena Lagrangeovih polinoma za izvođenje funkcija oblika osnovnoga prizmatičnog elementa s po dva čvora u pravcu koordinatnih osi.



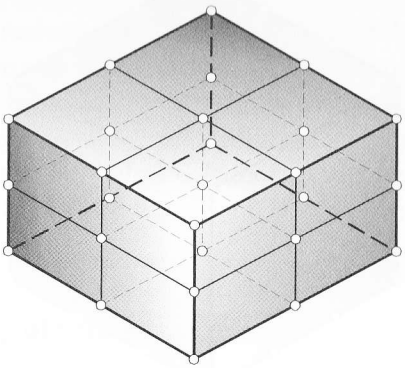
Slika 14.8. Pomoćna shema za izvođenje funkcija oblika

Za izvođenje funkcija oblika za elemente višeg reda može korisno poslužiti shema prema slici 14.8. koja se temelji na analogiji s dvodimenzijskim problemima. Prizma s čvorovima na slici 14.8. nastala je iz pravokutnika prema slici 13.12. uvođenjem treće dimenzije u pravcu osi z. Na taj način, osim n čvorova u pravcu osi x i m čvorova u pravcu osi y, nalazi se r čvorova u pravcu osi z. Sada su proizvoljnom čvoru i pridružene tri koordinate x_k, y_ℓ, z_p, gdje je $1 \le k \le n$, $1 \le \ell \le m$, $1 \le p \le r$, pa je funkcija oblika N_i jednaka

$$N_i = l_k(x)\, l_\ell(y) l_p(z). \tag{14.38}$$

Lagrangeovi polinomi $l_k(x)$ i $l_\ell(y)$ izračunavaju se pomoću relacija (13.45) i (13.46), a za $l_p(z)$ vrijedi analogna relacija

$$l_p(z)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{r}\frac{z-z_j}{z_p-z_j}. \tag{14.39}$$



Slika 14.9. Lagrangeov prizmatični element drugog reda

Isto kao i dvodimenzijski elementi i trodimenzijski elementi, čije se funkcije oblika izvode pomoću Lagrangeovih polinoma, nazivaju se Lagrangeovi konačni elementi. Prizmatični Lagrangeov element za koji je funkcija oblika jednaka trostrukom produktu Lagrangeovih polinoma drugog stupnja prikazan je na slici 14.9. Budući da se u pravcu koordinatnih osi nalaze po tri čvora, pripadne Lagrangeove funkcije izračunavaju se za $n=m=r=3$. Ako se koordinatni sustav postavi u težište elementa, a dimenzije u pravcu koordinatnih osi jednake su $2a$, $2b$ i $2c$ kao kod osnovnog prizmatičnog elementa prema slici 14.6., koordinate čvorova za pravce koordinatnih osi jednake su $x_1=-a$, $x_2=0$, $x_3=a$; $y_1=-b$, $y_2=0$, $y_3=b$; $z_1=-c$, $z_2=0$, $z_3=c$. Na taj način, Lagrangeovi polinomi za pravac osi x i y jednaki su relacijama (13.48) i (13.49), a analogno je za pravac osi z

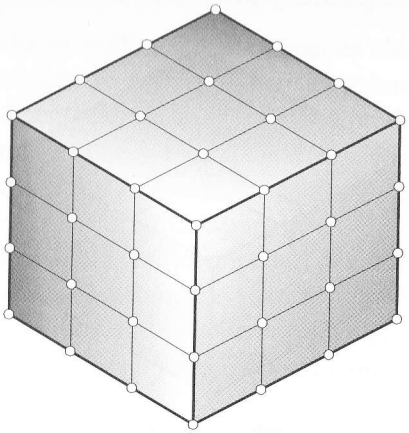
$$l_1(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{z}{c}\right),$$

$$l_2(z)=1-\frac{z^2}{c^2}, \tag{14.40}$$

$$l_3(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{c^2}+\frac{z}{c}\right).$$

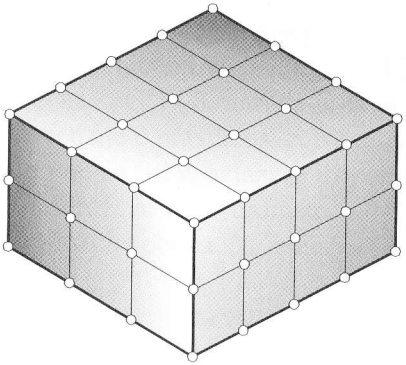
Nakon što se svakom čvoru pridruže koordinate u skladu sa shemom prema slici 14.8., pomoću relacije (14.38) jednostavno je izračunati funkcije oblika. Analo-

gan postupak proveden je pri izračunavanju funkcija oblika za osnovni prizmatični element u prethodnom odjeljku.



Slika 14.10. Lagrangeov prizmatični element trećeg reda

Na isti način izvode se funkcije oblika za Lagrangeov prizmatični element trećeg reda prema slici 14.10. Njegove funkcije oblika jednake su trostrukom produktu Lagrangeovih polinoma trećeg stupnja. Element se sastoji od 64 čvora s ukupno 192 stupnja slobode. Na slici su poradi preglednosti prikazani samo čvorovi na vanjskim vidljivim plohama. Osim opisanih konačnih elemenata s istim brojem čvorova u pravcu Kartezijevih koordinata, moguće je izvesti Lagrangeove elemente s različitim brojem čvorova u pravcu koordinatnih osi, slika 14.11. Njihove funkcije oblika izračunavaju se množenjem Lagrangeovih polinoma različitog stupnja. Za element prema slici 14.11., funkcije su oblika jednake produktu Lagrangeovih polinoma drugog, trećeg i četvrtog stupnja.



Slika 14.11. Lagrangeov konačni element s mješovitom interpolacijom

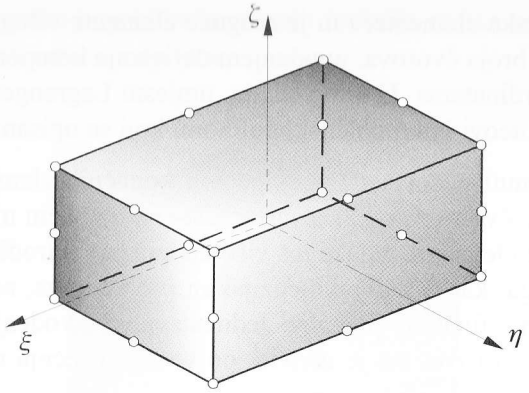
Kao i za tetraedarske elemente, i tu je moguće elemente višeg reda izvesti, umjesto povećanjem broja čvorova, uvođenjem derivacija komponenata pomaka po Kartezijevim koordinatama. U tom slučaju, umjesto Lagrangeovih funkcija primjenjuju se Hermiteovi interpolacijski polinomi koji su opisani u odjeljku 11.2.

Prethodno spomenuti nedostaci Lagrangeovih konačnih elemenata koji se ponajprije odnose na čvorove unutar elementa, što na taj način uvjetuje veliki broj stupnjeva slobode elementa, dolaze još više do izražaja u trodimenzijskim problemima. Osim toga, kao i u dvodimenzijskim problemima, nedostatak je i nepotpunost polinoma funkcije pomaka. Jednostavnost izvođenja funkcija oblika njihovo je dobro svojstvo, što je također od većeg značenja u trodimenzijskim problemima.

14.5.2. Serendipity elementi

Kao za dvodimenzijske probleme, i ovdje se izvode serendipity elementi kojima su, za razliku od Lagrangeovih konačnih elemenata, čvorovi raspodijeljeni samo duž bridova elementa. Na taj je način, uz jednaku raspodjelu pomaka duž bridova, znatno smanjen ukupan broj stupnjeva slobode elementa, što je važna prednost u odnosu na Lagrangeovu formulaciju. Osim toga, isto kao i u dvodimenzijskim problemima, potpunost polinoma veća je nego u Lagrangeovih elemenata. Jedini nedostatak serendipity elemenata je relativno složeno izvođenje funkcija oblika, što u trodimenzijskim problemima još više dolazi do izražaja. Postupak izvođenja funkcija oblika ovdje se neće razmatrati. Način izvođenja sličan je postupku koji je opisan u odjeljku 13.4.2. Kao i za Lagrangeove konačne elemente, i tu je moguće izvesti konačne elemente s različitim brojem čvorova u pravcu koordinatnih osi, koji omogućuju povezivanje trodimenzijskih serendipity elemenata višeg i nižeg reda.

U sljedećem izlaganju prikazuju se samo funkcije oblika za elemente drugog i trećeg reda u obliku paralelopipeda te za element drugog reda u obliku trostrane prizme koji se najčešće primjenjuju u analizi konstrukcija. Funkcije oblika za ostale elemente višeg reda mogu se naći u [66]. Funkcije oblika najčešće se prikazuju u prirodnim koordinatama ξ, η i ζ čije je ishodište u težištu elementa. Za element u obliku paralelopipeda prema slici 14.6., kad je Kartezijev koordinatni sustav također u težištu elementa, veza između prirodnih i Kartezijevih koordinata jednaka je $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\zeta = \frac{z}{c}$. Na taj način, vrijednosti koordinata ξ, η i ζ u području su između – 1 i + 1.



Slika 14.12. Prizmatični serendipity element drugog reda

Trodimenzijski serendipity element drugog reda prema slici 14.12. ima 20 čvorova s ukupno 60 stupnjeva slobode. Funkcije oblika koje se odnose na čvorove u vrhovima paralelopipeda jednake su

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i-2), \tag{14.41}$$

gdje su ξ_i, η_i i ζ_i koordinate čvorova koje poprimaju vrijednosti ± 1. Za čvorove po sredini bridova elementa s koordinatama $\xi_i = 0$, $\eta_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$ funkcije oblika jesu

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i). \tag{14.42}$$

Analogni su izrazi za čvorove s koordinatama $\eta_i = 0$, $\xi_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$

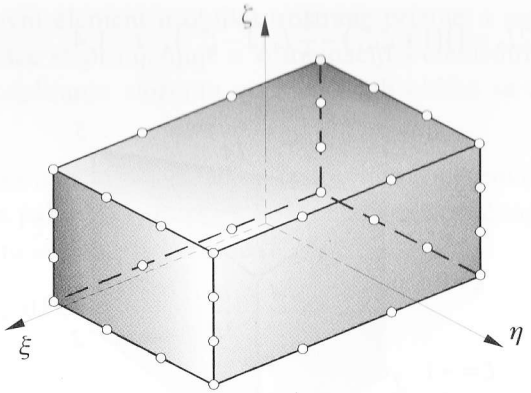
$$N_i = \frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)(1+\zeta\zeta_i). \tag{14.43}$$

Za preostale čvorove s koordinatama $\zeta_i = 0$, $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ vrijedi relacija

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i). \tag{14.44}$$

Prizmatični serendipity element trećeg reda, slika 14.13., sastoji se od 32 čvora s ukupno 96 stupnjeva slobode. Funkcije oblika za čvorove u vrhovima paralelopipeda jednake su

$$N_i = \frac{1}{64}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1-\zeta\zeta_i)\left[9(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-19\right]. \tag{14.45}$$



Slika 14.13. Prizmatični serendipity element trećeg reda

Za čvorove duž bridova koji su paralelni s koordinatom ξ, a koji su određeni koordinatama $\xi_i = \pm\frac{1}{3}$, $\eta_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$, funkcije su oblika

$$N_i = \frac{9}{64}\left(1-\xi^2\right)\left(1+9\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right)\left(1+\zeta\zeta_i\right). \tag{14.46}$$

Analogne su relacije za čvorove duž bridova koji su paralelni s koordinatama η i ς. Na taj je način, za čvorove s koordinatama $\eta_i = \pm\frac{1}{3}$, $\xi_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$,

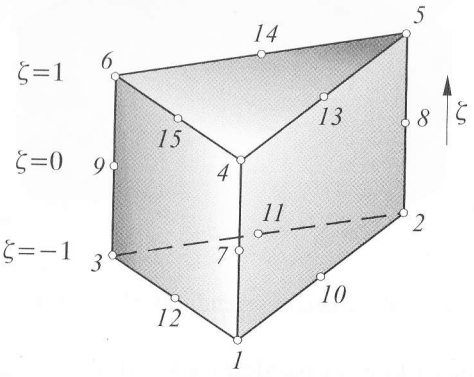
$$N_i = \frac{9}{64}\left(1-\eta^2\right)\left(1+9\eta\eta_i\right)\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\zeta\zeta_i\right), \tag{14.47}$$

a za koordinate čvorova $\zeta_i = \pm\frac{1}{3}$, $\xi_i = \pm 1$, $\eta_i = \pm 1$ vrijede relacije

$$N_i = \frac{9}{64}\left(1-\zeta^2\right)\left(1+9\zeta\zeta_i\right)\left(1+\xi\xi_i\right)\left(1+\eta\eta_i\right). \tag{14.48}$$

Za element drugog reda u obliku trostrane prizme prema slici 14.14., funkcije oblika jednake su umnošku funkcija oblika u površinskim koordinatama za trokutnu plohu i jednodimenzijskih polinoma u pravcu visine prizme. Za visinu prizme *2h* prema slici 14.7., u pravcu osi *z* uvodi se bezdimenzijska koordinata $\zeta = \frac{z}{h}$, pa su čvorovi duž stranica trokuta određeni koordinatama $\zeta = \pm 1$. Za čvorove koji raspolavljaju visinu prizme, $\zeta = 0$. Za čvorove *1* i *4* u vrhovima trokuta na slici 14.14. s koordinatama $\zeta_1 = -1$ i $\zeta_4 = 1$ kojima su pridružene površinske koordinate $L_1 = 1, L_2 = L_3 = 0$, funkcije oblika jednake su

$$N_i = \frac{1}{2}L_1(2L_1 - 1)(1 + \zeta\zeta_i) - \frac{1}{2}L_1(1 - \zeta^2), \quad i = 1,4. \tag{14.49}$$



Slika 14.14. Serendipity element drugog reda u obliku trostrane prizme

Analogno se dobiva za ostale čvorove u vrhovima trokuta za koje su površinske koordinate $L_2 = 1, L_1 = L_3 = 0$ i $L_3 = 1, L_1 = L_2 = 0$,

$$N_i = \frac{1}{2}L_2(2L_2 - 1)(1 + \zeta\zeta_i) - \frac{1}{2}L_2(1 - \zeta^2), \quad i = 2,5, \tag{14.50}$$

$$N_i = \frac{1}{2}L_3(2L_3 - 1)(1 + \zeta\zeta_i) - \frac{1}{2}L_3(1 - \zeta^2), \quad i = 3,6. \tag{14.51}$$

Funkcije oblika u čvorovima koji raspolavljaju stranice trokuta opisane su relacijama

$$N_i = 2L_1L_2(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 10,13, \tag{14.52}$$

$$N_i = 2L_2L_3(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 11,14, \tag{14.53}$$

$$N_i = 2L_1L_3(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 12,15, \tag{14.54}$$

a za čvorove 7, 8 i 9 koji raspolavljaju visinu prizme izvode se izrazi

$$N_7 = L_1(1 - \zeta^2), \tag{14.55}$$

$$N_8 = L_2(1 - \zeta^2), \tag{14.56}$$

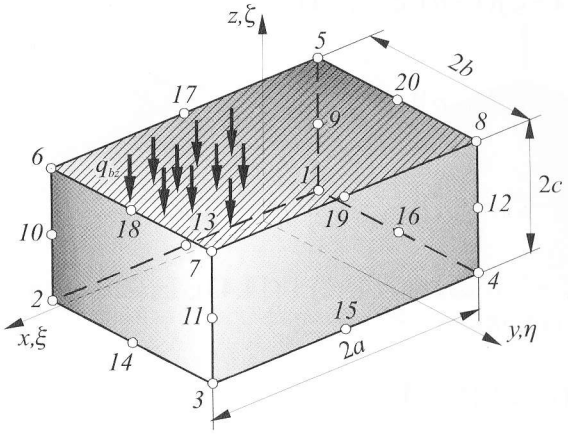
$$N_9 = L_3(1 - \zeta^2). \tag{14.57}$$

Jednako kao osnovni element u obliku trostrane prizme, i serendipity element drugog reda najčešće se primjenjuje u kombinaciji s elementima u obliku paralelopipeda pri modeliranju složenih geometrijskih oblika sa zakrivljenim plohama.

Korisno je prikazati izračunavanje sila u čvorovima zbog površinskog opterećenja koje djeluje na jednoj od ploha trodimenzijskoga konačnog elementa. Čvorne sile izračunavaju se pomoću relacije (8.18)

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_q} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b \, \mathrm{d}S \,,$$

gdje je $\mathbf{N}_S$ matrica funkcija oblika za pomake na površini elementa. Ako površinsko opterećenje $\mathbf{q}_b^T = [0 \quad 0 \quad q_{bz}]$ djeluje duž plohe serendipity elementa drugog reda prema slici 14.15., vektor ekvivalentnih čvornih sila u čvorovima duž bridova koji omeđuju opterećenu plohu sadržavat će samo komponente u pravcu osi z.



Slika 14.15. Površinsko opterećenje na prizmatičnom serendipity elementu drugog reda

Umjesto relacije $\mathbf{u}_S = \mathbf{N}_S \mathbf{v}$, gdje je $\mathbf{v}$ vektor stupnjeva slobode cijelog elementa, zbog jednostavnosti ovdje će se prikazati samo relacija koja povezuje komponentu pomaka w_S u pravcu osi z na opterećenoj plohi s pomacima u čvorovima koji su toj plohi pridruženi

$$w_S = \begin{bmatrix} N_{S5} & N_{S6} & N_{S7} & N_{S8} & N_{S17} & N_{S18} & N_{S19} & N_{S20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_{17} \\ w_{18} \\ w_{19} \\ w_{20} \end{bmatrix}. \quad (14.58)$$

Funkcije oblika N_{S5} - N_{S8} izračunavaju se pomoću relacije (14.41) za $\zeta = 1$. Na taj način dobiva se

$$N_{S5} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1),$$

$$N_{S6} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1),$$

$$N_{S7} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad (14.59)$$

$$N_{S8} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1).$$

Uvrštavanjem $\zeta = 1$ u izraze (14.42) i (14.43), izračunavaju se ostale funkcije oblika u relaciji (14.58)

$$N_{S17} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$N_{S18} = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2),$$

$$N_{S19} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad (14.60)$$

$$N_{S20} = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2).$$

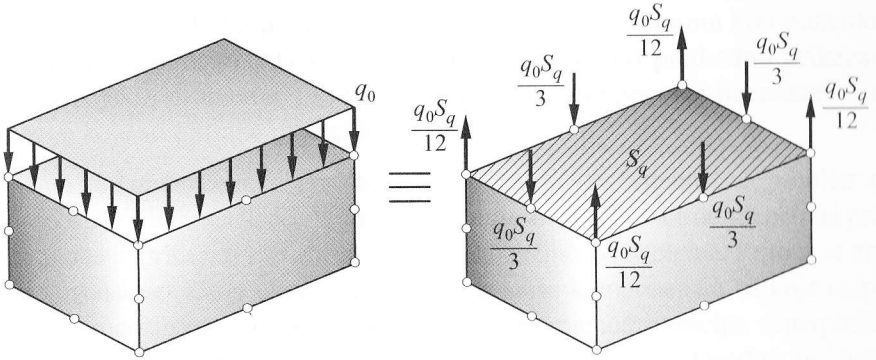
Lako je provjeriti da su ovdje prikazane funkcije oblika jednake izrazima (13.55), (13.56) i (13.60) koji opisuju funkcije oblika za dvodimenzijske serendipity elemente 2. reda. Budući da su funkcije oblika opisane u bezdimen-

zijskim koordinatama $\xi = \frac{x}{a}$ i $\eta = \frac{y}{b}$, elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ u (8.18) potrebno je prikazati u obliku

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{14.61}$$

Na temelju izraza (8.18), čvorne sile koje su različite od nule, za slučaj opterećenja prema slici 14.15. izračunavaju se pomoću sljedeće relacije:

$$\begin{bmatrix} F_{S5z} \\ \vdots \\ F_{S8z} \\ F_{S17z} \\ \vdots \\ F_{S20z} \end{bmatrix} = ab \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_{S5} \\ \vdots \\ N_{S8} \\ N_{S17} \\ \vdots \\ N_{S20} \end{bmatrix} q_{bz}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{14.62}$$



Slika 14.16. Sile u čvorovima zbog površinskog opterećenja

Nakon uvrštavanja izraza za funkcije oblika (14.59) i (14.60), te za konstantno površinsko opterećenje $q_{bz}(\xi,\eta) = q_0$, pomoću (14.62) dobivaju se čvorne sile

$$F_{S5z} = F_{S6z} = F_{S7z} = F_{S8z} = -\frac{q_0 S_q}{12}\,,$$

$$F_{S17z} = F_{S18z} = F_{S19z} = F_{S20z} = \frac{q_0 S_q}{3}\,, \tag{14.63}$$

gdje je $S_q = 4ab$ površina na kojoj djeluje opterećenje. Nije teško zaključiti da su sile u čvorovima u vrhovima paralelopipeda jednakog iznosa i djeluju suprotno od površinskog opterećenja q_0. U ostalim čvorovima koji raspolavljaju bridove paralelopipeda također se izračunavaju jednake vrijednosti sila, a njihov

smjer jednak je smjeru djelovanja opterećenja. Poradi preglednosti, sile u čvorovima koje su ekvivalentne konstantnom kontinuiranom opterećenju grafički su prikazane na slici 14.16. Lako je provjeriti da je uvjet ravnoteže zadovoljen, što znači da je suma sila u čvorovima jednaka površinskom opterećenju

$$\sum F_{Sz} = 4\left(-\frac{q_0 S_q}{12}\right) + 4\frac{q_0 S_q}{3} = q_0 S_q \,. \tag{14.64}$$

15. OSNOSIMETRIČNI KONAČNI ELEMENTI

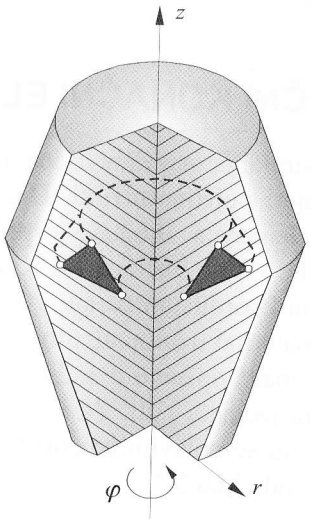
Ako je trodimenzijska konstrukcija osnosimetrična, rješavanje problema čvrstoće moguće je u velikoj mjeri pojednostavniti. Umjesto prethodno prikazanih trodimenzijskih konačnih elemenata, moguće je primijeniti osnosimetrične ili prstenaste konačne elemente. Pritom se umjesto Kartezijeva koordinatnog sustava najčešće rabi cilindrični koordinatni sustav. Ako je osim geometrije i opterećenje osnosimetrično, a materijal izotropan, problem je u matematičkom smislu dvodimenzijski. Polje pomaka opisano je radijalnom i osnom komponentom, a cirkularna je komponenta jednaka nuli. Za razliku od prethodno prikazanih dvodimenzijskih problema, tu se pojavljuju četiri komponente naprezanja i deformacije koje su opisane u odjeljku 3.3.

U slučaju kad opterećenje osnosimetričnih tijela nije osnosimetrično, problem ponovno postaje trodimenzijski. Primjenom Fourierovih redova trodimenzijski problem moguće je prikazati kao zbroj više dvodimenzijskih problema. Pritom se opterećenje osnosimetričnog elementa rastavlja na više komponenata za koje se provodi dvodimenzijska analiza, a nakon toga se primjenom principa superpozicije određuje stanje naprezanja i deformacije u razmatranom tijelu. Usprkos rješavanju jednadžbi konačnih elemenata za svaku komponentu opterećenja, vrijeme računanja kraće je u odnosu na primjenu trodimenzijskih konačnih elemenata jer je znatno smanjen ukupan broj stupnjeva slobode proračunskog modela.

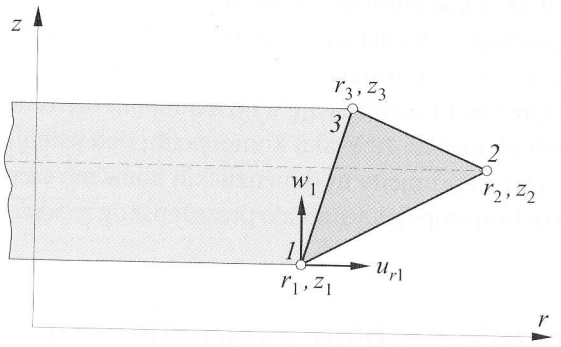
15.1. Rješavanje problema osnosimetrične deformacije

Za rješavanje problema osnosimetrične deformacije osnosimetričnih tijela rabe se osnosimetrični konačni elementi u obliku kružnog prstena čiji poprečni presjek, kao i kod dvodimenzijskih problema, može biti u obliku trokuta, pravokutnika ili proizvoljnog četverokuta. Čvorne točke konačnih elemenata sada prelaze u čvorne kružnice. Analogno ravninskim problemima, moguće je izvesti elemente višeg reda s većim brojem čvornih kružnica. Osnovni prstenasti ele-

menti su osnovni trokutni i osnovni pravokutni element s čvornim kružnicama u vrhovima trokuta, odnosno pravokutnika. Ovdje će se izvesti osnovne relacije za osnovni prstenasti element s trokutnim poprečnim presjekom s tri čvorne kružnice, slika 15.1. Svakom čvoru pridružene su cilindrične koordinate r, z, a komponente pomaka su u_r i w, prema slici 15.2. Relacije za ostale konačne elemente izvode se na analogan način.



Slika 15.1. Osnosimetrično tijelo s trokutnim elementom



Slika 15.2. Osnovni prstenasti trokutni element

Vektor pomaka sadrži radijalnu i osnu komponentu

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_r & w \end{bmatrix}, \tag{15.1}$$

a njihova je raspodjela opisana linearnim funkcijama na isti način kao i za osnovni trokutni element

$$u_r = a_1 + a_2 r + a_3 z,$$
$$w = a_4 + a_5 r + a_6 z. \tag{15.2}$$

Vektor stupnjeva slobode jednak je

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_{r1} & w_1 & u_{r2} & w_2 & u_{r3} & w_3 \end{bmatrix}. \tag{15.3}$$

Na način koji je opisan u odjeljku 6.2., izvodi se matrica funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \tag{15.4}$$

gdje su funkcije oblika

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\alpha_i + r\beta_i + z\gamma_i\right), \qquad i = 1,2,3. \tag{15.5}$$

Koeficijenti α_i, β_i i γ_i jednaki su

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = r_2 z_3 - r_3 z_2, && \alpha_2 = r_3 z_1 - r_1 z_3, && \alpha_3 = r_1 z_2 - r_2 z_1, \\ &\beta_1 = z_2 - z_3, && \beta_2 = z_3 - z_1, && \beta_3 = z_1 - z_2, \\ &\gamma_1 = r_3 - r_2, && \gamma_2 = r_1 - r_3, && \gamma_3 = r_2 - r_1, \end{aligned} \tag{15.6}$$

a A je površina trokuta

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{15.7}$$

Matrica $\mathbf{B}$ izračunava se deriviranjem funkcija oblika prema relaciji $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator prikazan u relaciji (3.56),

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \partial_r & 0 \\ \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & \partial_z \\ \partial_z & \partial_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}. \tag{15.8}$$

Nakon provedenih derivacija dobiva se matrica $\mathbf{B}$ u obliku

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0\\ \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0\\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3\\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3\end{bmatrix}, \tag{15.9}$$

gdje su članovi drugog retka opisani relacijom

$$\phi_i=\frac{1}{r}\left(\alpha_i+r\beta_i+z\gamma_i\right), \qquad i=1,2,3. \tag{15.10}$$

Za razliku od osnovnoga trokutnog elementa, matrici **B** pridružene su četiri komponente deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}^T=\left[\varepsilon_r \quad \varepsilon_\varphi \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}\right]$. Relacija (15.10) pokazuje da je komponenta deformacije ε_φ funkcija koordinata r i z, te na taj način polje deformacije nije konstantno, što je bio slučaj za osnovni trokutni element. Na temelju relacije $\mathbf{S}=\mathbf{DB}$ koja određuje raspodjelu naprezanja, gdje je **D** matrica elastičnosti prema (3.58), lako je zaključiti da se naprezanje također mijenja s koordinatama r i z.

Matrica krutosti određuje se pomoću relacije (8.15), gdje je elementarni volumen za osnosimetrična tijela jednak $\mathrm{d}V=2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$. Na taj je način matrica krutosti jednaka

$$\mathbf{k}=2\pi\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{15.11}$$

Korisno je uočiti da varijable r i z, koje se pojavljuju u matrici **B** pod integralom, znatno otežavaju eksplicitnu integraciju. Posebne poteškoće stvara koordinata r koja se nalazi u nazivniku, što je razlog da se nakon integriranja pojavljuju logaritamski izrazi. Osim toga, poteškoće nastaju u posebnom slučaju kad jedan ili više čvorova leži na osi simetrije, što zahtijeva poseban postupak izračunavanja. Spomenute poteškoće moguće je eliminirati primjenom približne numeričke integracije.

Drugi način da se olakša izračunavanje matrice krutosti je zamjena koordinata r i z s njihovim konstantnim vrijednostima u težištu trokutnoga poprečnog presjeka

$$\overline{r}=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}, \qquad \overline{z}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}. \tag{15.12}$$

Pomoću (15.12) svi članovi matrice **B** postaju konstantni, pa se na taj način ta matrica transformira u novu matricu $\overline{\mathbf{B}}$. Uz zamjenu koordinate r s prosječnom

vrijednošću $\bar{r}$, izraz za matricu krutosti (15.11) sada je moguće transformirati u novi približan izraz

$$\mathbf{k} = 2\pi \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{r} A, \tag{15.13}$$

koji je dovoljno točan za veliki broj inženjerskih problema. Najveće pogreške pojavljuju se za elemente u blizini osi, za koje je velika relativna promjena koordinate r. Pomoću matrice $\bar{\mathbf{B}}$ također je moguće izračunati prosječnu vrijednost naprezanja u težištu prikazanoga konačnog elementa $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{v}$, gdje je $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}$.

Potrebno je napomenuti da su zadovoljeni svi potrebni uvjeti za monotonu konvergenciju rješenja pomoću prikazanoga konačnog elemenata. Uvjeti kompatibilnosti duž rubova su zadovoljeni, a također je moguće opisati polje konstantnih deformacija i pomake krutog tijela. Korisno je uočiti da je za osnosimetrična tijela stanje konstantne deformacije moguće postići samo u slučaju kad je cirkularna komponenta deformacije konstantna, što znači kad je radijalni pomak u_r proporcionalan polumjeru r, a pomaci krutog tijela mogući su samo u pravcu osi z.

Za rješavanje problema čvrstoće, osim izračunavanja matrice krutosti, potrebno je duž čvornih kružnica odrediti sile zbog opterećenja konačnog elementa. Osnosimetrična tijela najčešće su opterećena volumenskim i površinskim silama. Kao volumenske sile, osim gravitacijskih sila, često se pojavljuju centrifugalne sile koje su posljedica rotacije osnosimetričnih tijela. Vektor čvornih sila zbog volumenskog opterećenja izračunava se pomoću relacije

$$\mathbf{F}_V = 2\pi \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{q}\, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z, \tag{15.14}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica funkcija oblika (15.4), a vanjske volumenske sile opisane su radijalnom i osnom komponentom

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} q_r & q_z \end{bmatrix}. \tag{15.15}$$

U slučaju rotacije, radijalne sile djeluju po jedinici volumena i proporcionalne su polumjeru r, pa uz pretpostavku da je $q_z = 0$, vektor vanjskoga volumenskog opterećenja jednak je

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 r & 0 \end{bmatrix}, \tag{15.16}$$

gdje je ρ gustoća materijala, a ω je kutna brzina. Uvrštavanjem (15.4) i (15.16) u (15.14), dobiva se izraz za čvorne sile

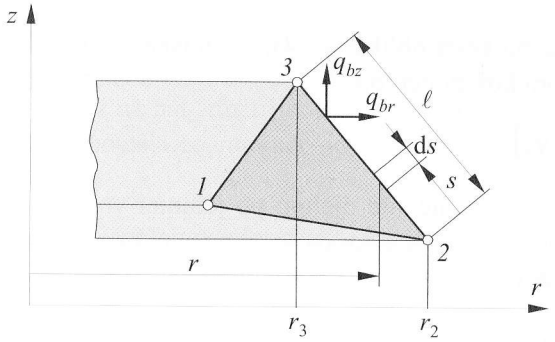
$$\mathbf{F}_V = 2\pi \int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho\omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \,. \tag{15.17}$$

Budući da je izraz za funkcije oblika (15.5) analogan relaciji (10.13) za površinske trokutne koordinate, za koordinatu r moguće je primijeniti linearnu interpolaciju prema relaciji (10.10)

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 \,, \tag{15.18}$$

gdje su r_i, $i = 1,2,3$, koordinate čvorova prema slici 15.2. Uvrštavanjem (15.18) u (15.17) i nakon integriranja uz primjenu relacije (10.18), gdje su umjesto površinskih koordinata L_i funkcije oblika N_i, izračunava se sljedeći vektor čvornih sila zbog centrifugalnog opterećenja

$$\mathbf{F}_V = \frac{\pi A \rho \omega^2}{15} \begin{bmatrix} 3r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 + r_2r_3 \\ 0 \\ r_1^2 + 3r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2 + r_1r_3 + 2r_2r_3 \\ 0 \\ r_1^2 + r_2^2 + 3r_3^2 + r_1r_2 + 2r_1r_3 + 2r_2r_3 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{15.19}$$



Slika 15.3. Osnosimetrični trokutni element s površinskim opterećenjem

Određivanje vektora čvornih sila zbog površinskog opterećenja prikazat će se na primjeru kad opterećenje djeluje duž osnosimetrične plohe omeđene čvornim kružnicama *2* i *3*, prema slici 15.3. Ako se duž opterećene plohe uvede lokalna

koordinata s, proizvoljno opterećenje moguće je prikazati ovisno o koordinati s pomoću radijalne i osne komponente

$$\mathbf{q}_b^T(s) = \left[q_{br}(s) \quad q_{bz}(s) \right]. \tag{15.20}$$

Prema slici 15.3. elementarna površina je $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}s$, pa je na temelju relacije (8.18), za duljinu ℓ izvodnice opterećene plohe, sila u čvorovima jednaka

$$\mathbf{F}_S = 2\pi \int_\ell \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b(s) r \, \mathrm{d}s. \tag{15.21}$$

Budući da je duž opterećene izvodnice linearna raspodjela pomaka kao za osnovni trokutni element, a opterećenje djeluje između čvorova koji su označeni istim brojevima *2* i *3*, matrica funkcija oblika jednaka je izrazu (13.13). Ako se u (13.13) funkcije oblika za čvorove *2* i *3* označe s

$$N_{S2} = 1 - \frac{s}{\ell} \quad \text{i} \quad N_{S3} = \frac{s}{\ell}, \tag{15.22}$$

matricu funkcija oblika moguće je prikazati na sljedeći način:

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{S2} & 0 & N_{S3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{S2} & 0 & N_{S3} \end{bmatrix}. \tag{15.23}$$

Za eksplicitno izračunavanje integrala (15.21), potrebno je koordinatu r prikazati pomoću lokalne koordinate s. Iz slike 15.3. lako je prepoznati da vrijedi relacija

$$\frac{r_2 - r_3}{\ell} = \frac{r_2 - r}{s},$$

iz koje slijedi izraz za koordinatu r

$$r = r_2 \left(1 - \frac{s}{\ell} \right) + r_3 \frac{s}{\ell}. \tag{15.24}$$

Na temelju (15.22), relacija (15.24) može se napisati u obliku

$$r = N_{S2} r_2 + N_{S3} r_3, \tag{15.25}$$

koji predstavlja linearnu interpolaciju analogno relaciji (10.1). Pomoću (15.20), (15.23) i (15.25), izraz za izračunavanje vektora čvornih sila postaje

$$\mathbf{F}_S = 2\pi \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{S2} & 0 \\ 0 & N_{S2} \\ N_{S3} & 0 \\ 0 & N_{S3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{br}(s) \\ q_{bz}(s) \end{bmatrix} (N_{S2} r_2 + N_{S3} r_3)\, \mathrm{d}s \,. \tag{15.26}$$

Uz pretpostavku konstantnoga površinskog opterećenja $q_{br}(s) = q_{br0}$ i $q_{bz}(s) = q_{bz0}$, nakon provedbe integracije uz primjenu relacije (10.5), gdje su umjesto prirodnih koordinata L_1 i L_2 funkcije oblika N_{S2} i N_{S3}, izračunava se sljedeći vektor čvornih sila

$$\mathbf{F}_S = \frac{\pi \ell}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2r_2 + r_3) q_{br0} \\ (2r_2 + r_3) q_{bz0} \\ (r_2 + 2r_3) q_{br0} \\ (r_2 + 2r_3) q_{bz0} \end{bmatrix} . \tag{15.27}$$

Ako duž čvornih kružnica po jedinici duljine djeluju koncentrirane sile, za njihovo uvrštavanje u jednadžbu konačnog elementa potrebno ih je pomnožiti s duljinom kružnice. Na taj način vektor vanjskih koncentriranih sila jednak je

$$\mathbf{F}^T = 2\pi r \begin{bmatrix} F_r & F_z \end{bmatrix}, \tag{15.28}$$

gdje je F_r radijalna, a F_z osna vektorska komponenta.

15.2. Proizvoljno opterećenje osnosimetričnih elemenata

U općem slučaju kad opterećenje osnosimetričnih konstrukcija nije osnosimetrično, problem analize naprezanja je trodimenzijski. Polje pomaka opisano je s tri komponente. Osim radijalne i osne komponente u_r i w u cilindričnom koordinatnom sustavu, različita je od nule i treća cirkularna komponenta v_φ. Na taj način, vektor pomaka jednak je

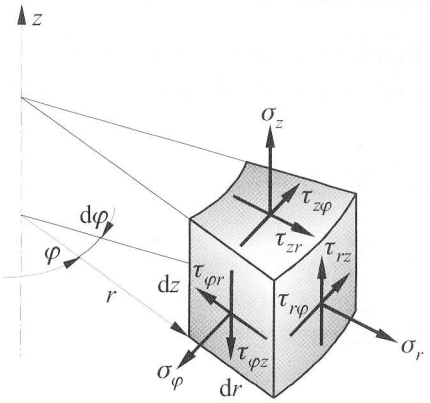
$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_r & v_\varphi & w \end{bmatrix}. \tag{15.29}$$

Sve su komponente funkcije cilindričnih koordinata r, φ i z. Deformacija i naprezanje opisani su sa sljedećih šest komponenata, koje se također u općem slučaju mijenjaju sa spomenutim koordinatama

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_\varphi & \varepsilon_z & \gamma_{r\varphi} & \gamma_{\varphi z} & \gamma_{zr} \end{bmatrix}, \tag{15.30}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_\varphi & \sigma_z & \tau_{r\varphi} & \tau_{\varphi z} & \tau_{zr} \end{bmatrix}. \tag{15.31}$$

Pozitivne komponente naprezanja na elementarnom volumenu osnosimetričnog tijela prikazane su na slici 15.4.



Slika 15.4. Komponente naprezanja na elementarnom volumenu osnosimetričnog tijela

Kinematičke relacije koje povezuju komponente deformacije i pomake jednake su [110]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ v_\varphi \\ w \end{bmatrix}. \tag{15.32}$$

Veza između naprezanja i deformacije opisana je poznatom relacijom $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, gdje je $\mathbf{D}$ matrica elastičnosti koja je jednaka relaciji (3.26).

Umjesto klasične trodimenzijske analize koja je opisana u 14. poglavlju, ovdje se rješavanje trodimenzijskog problema provodi tako da se primjenom Fourierovih redova trodimenzijski problem transformira na više dvodimenzijskih problema, čija rješenja se međusobno zbroje. Osnosimetrično tijelo diskretizira se pomoću prethodno opisanih osnosimetričnih konačnih elemenata, te je na taj način izostavljena podjela na konačne elemente u cirkularnom smjeru, što znatno pridonosi skraćenju vremena računanja. Pritom je opterećenje zajedno s pomacima potrebno razviti u Fourierove redove.

Razvoj opterećenja u Fourierove redove prikazan je na sljedećem primjeru volumenskih sila koje su opisane u cilindričnom koordinatnom sustavu s komponentama q_r, q_φ i q_z

$$\begin{aligned} q_r &= \sum_n q_{rn}^s \cos n\varphi + \sum_n q_{rn}^a \sin n\varphi, \\ q_\varphi &= \sum_n q_{\varphi n}^s \sin n\varphi + \sum_n q_{\varphi n}^a \cos n\varphi, \\ q_z &= \sum_n q_{zn}^s \cos n\varphi + \sum_n q_{zn}^a \sin n\varphi. \end{aligned} \tag{15.33}$$

Kao što pokazuje relacija (15.33), komponente opterećenja jednake su zbroju simetričnih i antisimetričnih članova. Veličine q_{rn}^s, $q_{\varphi n}^s$ i q_{zn}^s simetrične su amplitude opterećenja s obzirom na ravninu $\varphi = 0$, a q_{rn}^a, $q_{\varphi n}^a$, q_{zn}^a označuju antisimetrične amplitude. Amplitude opterećenja funkcije su koordinata r, z i cjelobrojnog indeksa n, a neovisne su o cirkularnoj koordinati φ. Ovdje indeks n označuje broj valova u cirkularnom smjeru, odnosno broj harmonika Fourierova reda. Analogno relacijama (15.33), moguće je prikazati površinsko opterećenje i koncentrirane sile duž čvornih kružnica.

Komponentama opterećenja pridružene su sljedeće komponente pomaka koje se također prikazuju pomoću Fourierovih redova

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_n u_{rn}^s \cos n\varphi + \sum_n u_{rn}^a \sin n\varphi, \\ v_\varphi &= \sum_n v_{\varphi n}^s \sin n\varphi - \sum_n v_{\varphi n}^a \cos n\varphi, \\ w &= \sum_n w_n^s \cos n\varphi + \sum_n w_n^a \sin n\varphi, \end{aligned} \tag{15.34}$$

gdje su u_{rn}^s, $v_{\varphi n}^s$, w_n^s simetrične amplitude pomaka za n-ti harmonik, a u_{rn}^a, $v_{\varphi n}^a$ i w_n^a antisimetrične su amplitude. Negativan predznak u izrazu za v_φ omoguću-

je izračunavanje jednakih matrica krutosti za simetrične i antisimetrične harmonike, što znatno pridonosi numeričkoj učinkovitosti.

Uvrštavanjem $n=0$ u relacije (15.34) i izostavljanjem antisimetričnih veličina, opisuje se osnosimetričan problem. Na taj su način komponente pomaka jednake $u_r = u_{r0}^s(r,z)$, $w = w_0^s(r,z)$, $v_\varphi = 0$, što odgovara pomacima koji su razmatrani u prethodnom odjeljku. Nasuprot tome, antisimetričan problem je opisan samo antisimetričnim komponentama. Tako je, na primjer, uvijanje osnosimetričnog tijela opisano pomoću relacija (15.34) uz $n=0$ i izostavljanjem simetričnih članova, što pokazuju komponente pomaka $u_r = w = 0$ i $v_\varphi = -v_{\varphi 0}^a(r,z)$.

Raspodjela amplituda pomaka pojedinih harmonika po poprečnom presjeku osnosimetričnog elementa ovisno o amplitudama u čvorovima, prikazuje se pomoću poznatih funkcija oblika. Za osnosimetričan element s trokutnim poprečnim presjekom s tri čvora, simetrične amplitude pomaka jednake su

$$u_{rn}^s = \sum_{i=1}^{3} N_i\, u_{rni}^s, \quad v_{\varphi n}^s = \sum_{i=1}^{3} N_i\, v_{\varphi ni}^s, \quad w_n^s = \sum_{i=1}^{3} N_i\, w_{ni}^s, \tag{15.35}$$

gdje su u_{rni}^s, $v_{\varphi ni}^s$ i w_{ni}^s simetrične amplitude pomaka u čvorovima konačnih elemenata, a N_i funkcije su oblika za trokutni poprečni presjek, koje su u prethodnom odjeljku opisane relacijom (15.5). Analogne relacije vrijede za antisimetrične amplitude. U relacijama (15.35) potrebno je samo gornji indeks s zamijeniti s indeksom a. Nakon uvrštavanja izraza (15.35) i analognih relacija za antisimetrične amplitude u (15.34), vektor pomaka moguće je prikazati u obliku

$$\mathbf{u} = \sum_n \mathbf{N}_n^s\, \mathbf{v}_n^s + \sum_n \mathbf{N}_n^a\, \mathbf{v}_n^a, \tag{15.36}$$

gdje su $\mathbf{N}_n^s$ i $\mathbf{N}_n^a$, matrice funkcija oblika za simetrične i antisimetrične harmonike, a $\mathbf{v}_n^s$ i $\mathbf{v}_n^a$ pripadni su vektori stupnjeva slobode koji opisuju amplitude pomaka u čvorovima konačnog elementa. Izrazi za funkcije oblika jednaki su

$$\mathbf{N}_n^s = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1n}^s & \mathbf{N}_{2n}^s & \mathbf{N}_{3n}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_n^a = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1n}^a & \mathbf{N}_{2n}^a & \mathbf{N}_{3n}^a \end{bmatrix}, \tag{15.37}$$

gdje su submatrice opisane izrazima

$$\mathbf{N}_{in}^s = \begin{bmatrix} N_i \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & N_i \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & N_i \cos n\varphi \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3, \tag{15.38}$$

$$\mathbf{N}_{in}^{a}=\begin{bmatrix} N_i \sin n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -N_i \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & N_i \sin n\varphi \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3. \tag{15.39}$$

Vektori su stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}_n^{sT}=\begin{bmatrix} u_{r1n}^{s} & v_{\varphi 1n}^{s} & w_{1n}^{s} & u_{r2n}^{s} & v_{\varphi 2n}^{s} & w_{2n}^{s} & u_{r3n}^{s} & v_{\varphi 3n}^{s} & w_{3n}^{s} \end{bmatrix}, \tag{15.40}$$

$$\mathbf{v}_n^{aT}=\begin{bmatrix} u_{r1n}^{a} & v_{\varphi 1n}^{a} & w_{1n}^{a} & u_{r2n}^{a} & v_{\varphi 2n}^{a} & w_{2n}^{a} & u_{r3n}^{a} & v_{\varphi 3n}^{a} & w_{3n}^{a} \end{bmatrix}. \tag{15.41}$$

Deriviranjem komponenata pomaka prema relaciji (15.32), određuje se polje deformacije u konačnom elementu, koje je također potrebno prikazati kao zbroj simetričnih i antisimetričnih harmonika

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sum_n \mathbf{B}_n^s \mathbf{v}_n^s+\sum_n \mathbf{B}_n^a \mathbf{v}_n^a. \tag{15.42}$$

Matrice $\mathbf{B}_n^s$ i $\mathbf{B}_n^a$ izračunavaju se deriviranjem funkcija oblika

$$\mathbf{B}_n^s=\mathbf{D}_k\mathbf{N}_n^s, \quad \mathbf{B}_n^a=\mathbf{D}_k\mathbf{N}_n^a, \tag{15.43}$$

gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator prikazan u relaciji (15.32), a za trokutni prstenasti element prikazuju se pomoću submatrica na sljedeći način:

$$\mathbf{B}_n^s=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1n}^s & \mathbf{B}_{2n}^s & \mathbf{B}_{3n}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_n^a=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1n}^a & \mathbf{B}_{2n}^a & \mathbf{B}_{3n}^a \end{bmatrix}. \tag{15.44}$$

Submatrice su prikazane izrazima

$$\mathbf{B}_{in}^{s}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\varphi & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{r}\cos n\varphi & \dfrac{nN_i}{r}\cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\varphi \\ -\dfrac{nN_i}{r}\sin n\varphi & \left(\dfrac{\partial N_i}{\partial r}-\dfrac{N_i}{r}\right)\sin n\varphi & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\varphi & -\dfrac{nN_i}{r}\sin n\varphi \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\varphi & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\varphi \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3, \tag{15.45}$$

$$\mathbf{B}_{in}^{a} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\sin n\varphi & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{r}\sin n\varphi & \dfrac{nN_i}{r}\sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\varphi \\ -\dfrac{nN_i}{r}\cos n\varphi & -\left(\dfrac{\partial N_i}{\partial r}-\dfrac{N_i}{r}\right)\cos n\varphi & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\varphi & \dfrac{nN_i}{r}\cos n\varphi \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\varphi & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\varphi \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3 \quad (15.46)$$

Lako je uočiti da su matrice međusobne ovisnosti deformacije i pomaka funkcije cilindričnih koordinata r, z, φ te cjelobrojnog indeksa n koji određuje član u Fourierovu razvoju.

Sad je moguće izračunati matrice krutosti za pojedine harmonike, koje su potrebne za izračunavanje simetričnih i antisimetričnih amplituda u čvorovima konačnih elemenata

$$\mathbf{k}_n^s = \int_V \mathbf{B}_n^{sT}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_n^s\,\mathrm{d}V\,, \quad (15.47)$$

$$\mathbf{k}_n^a = \int_V \mathbf{B}_n^{aT}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}_n^a\,\mathrm{d}V\,. \quad (15.48)$$

U ovim relacijama **D** je matrica elastičnosti za trodimenzijske probleme koja je prikazana relacijom (3.26), a elementarni volumen je jednak $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$, slika 15.4. Sile u čvorovima za pojedine harmonike opterećenja izračunavaju se analogno izrazima (8.17) i (8.18)

$$\mathbf{F}_{Vn}^s = \int_V \mathbf{N}_n^{sT}\,\mathbf{q}_n^s\,\mathrm{d}V\,, \quad \mathbf{F}_{Vn}^a = \int_V \mathbf{N}_n^{aT}\,\mathbf{q}_n^a\,\mathrm{d}V\,, \quad (15.49)$$

$$\mathbf{F}_{Sn}^s = \int_{S_q} \mathbf{N}_{Sn}^{sT}\,\mathbf{q}_{bn}^s\,\mathrm{d}S\,, \quad \mathbf{F}_{Sn}^a = \int_{S_q} \mathbf{N}_{Sn}^{aT}\,\mathbf{q}_{bn}^a\,\mathrm{d}S\,, \quad (15.50)$$

gdje su $\mathbf{N}_{Sn}^s$ i $\mathbf{N}_{Sn}^a$ funkcije oblika koje opisuju raspodjelu pomaka na opterećenim površinama za simetrične i antisimetrične harmonike. Veličine $\mathbf{q}_n^s$, $\mathbf{q}_n^a$, vektori su volumenskog, a $\mathbf{q}_{bn}^s$ i $\mathbf{q}_{bn}^a$ površinskog opterećenja koji su pridruženi simetričnim i antisimetričnim harmonicima prema relaciji (15.33). Funkcije su

koordinata r, z, φ i indeksa n koji određuje broj harmonika. Sile po jedinici volumena jednake su

$$\mathbf{q}_n^s = \begin{bmatrix} q_{rn}^s \cos n\varphi \\ q_{\varphi n}^s \sin n\varphi \\ q_{zn}^s \cos n\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_n^a = \begin{bmatrix} q_{rn}^a \sin n\varphi \\ q_{\varphi n}^a \cos n\varphi \\ q_{zn}^a \sin n\varphi \end{bmatrix}. \tag{15.51}$$

Analogne relacije vrijede za površinsko opterećenje $\mathbf{q}_b^T = \begin{bmatrix} q_{br} & q_{b\varphi} & q_{bz} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{q}_{bn}^s = \begin{bmatrix} q_{brn}^s \cos n\varphi \\ q_{b\varphi n}^s \sin n\varphi \\ q_{bzn}^s \cos n\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{bn}^a = \begin{bmatrix} q_{brn}^a \sin n\varphi \\ q_{b\varphi n}^a \cos n\varphi \\ q_{bzn}^a \sin n\varphi \end{bmatrix}. \tag{15.52}$$

Na način koji je opisan u 8. poglavlju, izvode se globalne matrice krutosti $\mathbf{K}_n^s$, $\mathbf{K}_n^a$ i globalni vektori ukupnog opterećenja $\mathbf{R}_n^s$, $\mathbf{R}_n^a$ za svaki harmonik. Na taj način su globalne jednadžbe konačnih elemenata

$$\mathbf{K}_n^s \mathbf{V}_n^s = \mathbf{R}_n^s, \tag{15.53}$$

$$\mathbf{K}_n^a \mathbf{V}_n^a = \mathbf{R}_n^a, \tag{15.54}$$

gdje su $\mathbf{V}_n^s$ i $\mathbf{V}_n^a$ simetrične i antisimetrične amplitude globalnoga vektora pomaka proračunskog modela. Nakon integriranja prema izrazima (15.47) do (15.50), članovi u matricama krutosti i u vektorima sila funkcije su samo koordinata r, z i indeksa n. Ovisnost o cirkularnoj koordinati φ eliminirana je nakon provedene integracije po toj koordinati, pri čemu se primjenjuju poznate relacije

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0, \quad n \neq m, \tag{15.55}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \pi.$$

Nakon rješavanja sustava jednadžbi (15.53) i (15.54) i izračunavanja nepoznatih amplituda pomaka za pojedine harmonike u čvornim kružnicama, superpozicijom se određuje raspodjela pomaka u osnosimetričnim konačnim elementima. Raspodjela naprezanja također se izračunava zbrajanjem naprezanja za pojedine harmonike prema sljedećoj relaciji:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\sum_n \mathbf{B}_n^s \mathbf{v}_n^s + \sum_n \mathbf{B}_n^a \mathbf{v}_n^a \right), \tag{15.56}$$

pri čemu se pretpostavlja da su početne deformacije jednake nuli. Potreban broj harmonika primijenjenoga Fourierova reda ovisi o složenosti opterećenja osnosimetričnog tijela. Složenije opterećenje zahtijeva i veći broj članova trigonometrijskog reda, što ima za posljedicu dulje vrijeme računanja. Usprkos velikom broju harmonika, koji je često potreban pri opterećenju koncentriranim silama, u najvećem broju slučajeva ovdje prikazani postupak ima znatne prednosti u odnosu na primjenu klasičnih trodimenzijskih elemenata.

16. IZOPARAMETARSKI KONAČNI ELEMENTI

U prethodnim poglavljima razmatrani su konačni elementi pravilnih geometrijskih oblika s ravnim stranicama kao što su trokut, pravokutnik, prizma i tetraedar. Pomoću tih elemenata nije moguće točno opisati zakrivljenu geometriju, odnosno za njezino opisivanje potreban je veliki broj elemenata. Zato se pokazala potreba izvođenja elemenata sa zakrivljenim stranicama koji omogućuju znatno bolje modeliranje složenih geometrijskih oblika.

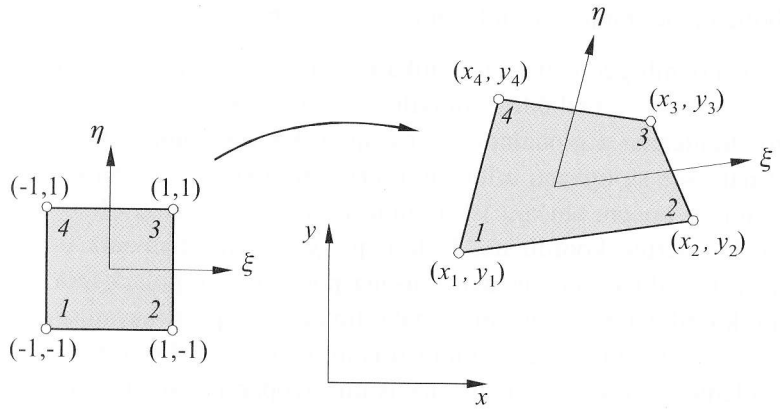
Elemente osnovnih geometrijskih oblika moguće je preslikati, iz lokalnoga koordinatnog sustava, u različite nepravilne geometrijske oblike s ravnim ili zakrivljenim stranicama u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Osnovni elementi najčešće su opisani u lokalnim prirodnim koordinatama koje se nakon preslikavanja u općem slučaju iskrivljuju, tj. više nisu međusobno okomite ili prelaze u krivocrtne koordinate. Pritom je geometrija elementa u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu opisana pomoću interpolacijskih funkcija u prirodnim koordinatama, koje su jednake funkcijama preslikavanja. Ako je polje pomaka u elementu opisano pomoću istih interpolacijskih funkcija kao i geometrija elementa, takve elemente nazivamo izoparametarskim konačnim elementima. Kad su funkcije oblika koje opisuju geometriju elementa višeg reda od funkcija koje opisuju polje pomaka, elementi su superparametarski. Kad je pak geometrija opisana interpolacijskim funkcijama nižeg reda nego što je opisano polje pomaka, elementi se nazivaju subparametarski. U analizi konstrukcija najčešće se primjenjuju izoparametarski konačni elementi.

Ovdje će se razmatrati izoparametarski elementi za dvodimenzijsku i trodimenzijsku analizu. Prikazat će se izvođenje matrice krutosti uz razmatranje uvjeta konvergencije. Osim bezdimenzijskih prirodnih koordinata ξ, η, ζ, primijenit će se površinske i volumenske koordinate. Razmatrat će se samo elementi s jednakim brojem čvorova u pravcu koordinatnih osi. Na kraju će se ukratko opisati postupak numeričke integracije.

16.1. Dvodimenzijski elementi

16.1.1. Četverokutni elementi

Formulaciju izoparametarskih konačnih elemenata najprikladnije je objasniti na primjeru osnovnoga četverokutnog dvodimenzijskog elementa. U odjeljku 10.2. opisano je preslikavanje četverokutnog elementa iz Kartezijeva globalnoga koordinatnog sustava u kvadrat s jediničnim koordinatama vrhova u lokalnom bezdimenzijskom prirodnom koordinatnom sustavu. Kvadrat čiji su vrhovi opisani s jediničnim koordinatama najčešće se naziva izvorni ili referentni element čijim je preslikavanjem u Kartezijevu globalnom koordinatnom sustavu moguće dobiti proizvoljni četverokutni element. Ako izvorni element ima više čvorova duž stranica, ravne prirodne koordinate ξ, η mogu se u globalnom koordinatnom sustavu preslikati u krivocrtne koordinate koje opisuju element sa zakrivljenim stranicama.



Slika 16.1. Preslikavanje izvornog elementa u proizvoljni četverokut

Relacije koje povezuju prirodne i globalne Kartezijeve koordinate izvode se pomoću sljedeće transformacije:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta\,,$$

$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta\,, \tag{16.1}$$

gdje se koeficijenti a_1 do a_8 izračunavaju uvrštavanjem koordinata čvorova prema slici 16.1.

$$x_i = x(\xi_i, \eta_i)\,,$$

$$y_i = y(\xi_i, \eta_i)\,, \qquad i = 1\cdots 4\,. \tag{16.2}$$

Za vrijednosti koordinata $\xi_i = \pm 1$ i $\eta_i = \pm 1$, globalne koordinate čvorova moguće je, ovisno o nepoznatim koeficijentima, prikazati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}. \tag{16.3}$$

Nakon invertiranja matrice s jediničnim vrijednostima, koeficijenti a_1 do a_4 jednaki su

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \tag{16.4}$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijente u prvu od relacija (16.1), izraz za koordinatu x moguće je napisati u ovisnosti o koordinatama vrhova četverokuta

$$x = \frac{1}{4}\left[(1-\xi-\eta+\xi\eta)x_1 + (1+\xi-\eta-\xi\eta)x_2 + (1+\xi+\eta+\xi\eta)x_3 + (1-\xi+\eta-\xi\eta)x_4\right],$$

što je moguće kraće zapisati u obliku koji je jednak relacijama (10.23)

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i, \tag{16.5}$$

gdje je

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta). \tag{16.6}$$

Nije teško provjeriti da za funkciju $N_i(\xi,\eta)$ vrijedi $N_i(\xi_i,\eta_i) = 1$ i $N_i(\xi_j,\eta_j) = 0$ za $j \neq i$, što je poznata karakteristika interpolacijskih funkcija oblika. Analognim postupkom izvodi se relacija za koordinatu y

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i. \tag{16.7}$$

Polje pomaka opisuje se pomoću istih interpolacijskih funkcija na sljedeći način:

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, u_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) v_i , \tag{16.8}$$

gdje su u i v komponente pomaka u pravcu globalnih Kartezijevih koordinatnih osi, a u_i i v_i pomaci su u i-tom čvoru konačnog elementa.

Na analogan način, preslikavanjem izvornog elementa s osam čvorova, izvodi se element sa zakrivljenim stranicama u Kartezijevu koordinatnom sustavu, prema slici 16.2. Funkcije preslikavanja N_i interpolacijske su funkcije serendipity elementa drugog reda koje su prikazane relacijama (13.55), (13.56) i (13.60). Geometrija elementa opisana je analogno izrazima (16.5) i (16.7)

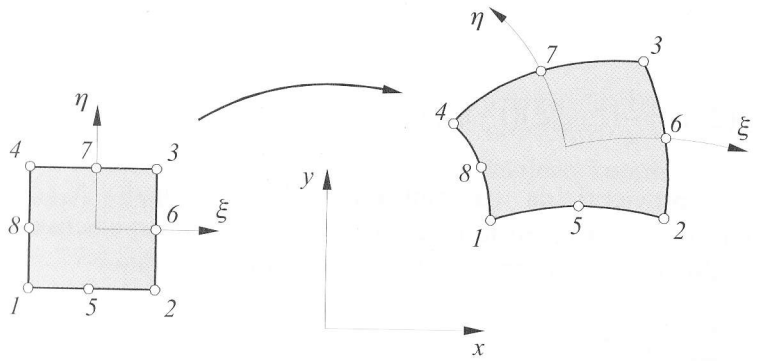
$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) x_i ,$$

$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) y_i , \tag{16.9}$$

a pomaci u elementu jednaki su

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) u_i ,$$

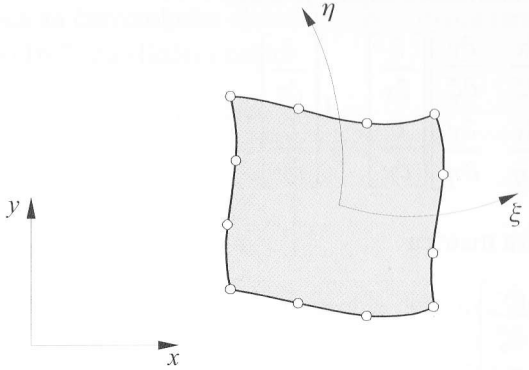
$$v = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta) v_i . \tag{16.10}$$



Slika 16.2. Izoparametarski element drugog reda sa zakrivljenim stranicama

Na sličan način, preslikavanjem Lagrangeova izvornog elementa, izvodi se Lagrangeov krivocrtni element s devet čvorova. Pritom se primjenjuju Lagrangeovi interpolacijski polinomi prema (13.47). Analogno se izvode ostali serendipity i Lagrangeovi elementi višeg reda sa zakrivljenim stranicama koje su opisane

pripadnim interpolacijskim funkcijama višeg reda. Iz razloga koji su već navedeni, formulacija serendipity elemenata primjenjuje se mnogo češće. Pomoću relacija koje su analogne izrazima (16.9) i (16.10), uz primjenu interpolacijskih funkcija (13.61) do (13.63), izvodi se izoparametarski element trećeg reda prema slici 16.3. Lako je uočiti da su stranice elemenata opisane polinomima trećeg stupnja.



Slika 16.3. Izoparametarski element trećeg reda

Važno svojstvo izoparametarskih konačnih elemenata je mogućnost opisivanja složenih geometrijskih oblika sa zakrivljenim rubovima. Za dovoljno točno modeliranje zakrivljene geometrije potrebno je znatno manje izoparametarskih elemenata sa zakrivljenim stranicama nego u slučaju kad se primjenjuju elementi pravilnih geometrijskih oblika. Na taj je način ukupan broj stupnjeva slobode manji, što zahtijeva manje memorije u računalu i znatno pridonosi brzini rješavanja problema. Osim toga, za izoparametarske elemente interpolacijske funkcije koje opisuju geometriju i raspodjelu pomaka neovisne su o koordinatama čvorova. Više elemenata s različitim koordinatama čvorova moguće je opisati pomoću jednog te istoga izvornog elementa s istim interpolacijskim funkcijama. Na slici 16.4. prikazan je proračunski model čiji se elementi izvode preslikavanjem izvornog serendipity elementa drugog reda s osam čvorova.

Za izračunavanje matrice **B** potrebno je provesti deriviranje interpolacijskih funkcija N_i po Kartezijevim koordinatama x i y. Za osnovni četverokutni element s četiri čvora matrica **B** izračunava se prema relaciji (13.31). Kao što je gore pokazano, interpolacijske funkcije su funkcije prirodnih bezdimenzijskih koordinata, pa se njihovo deriviranje po Kartezijevim koordinatama provodi primjenom Jacobijeve transformacije. Jacobijeva matrica koja povezuje derivacije po prirodnim i Kartezijevim koordinatama, za dvodimenzijski problem izvodi se primjenom poznatoga lančanog pravila na sljedeći način:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

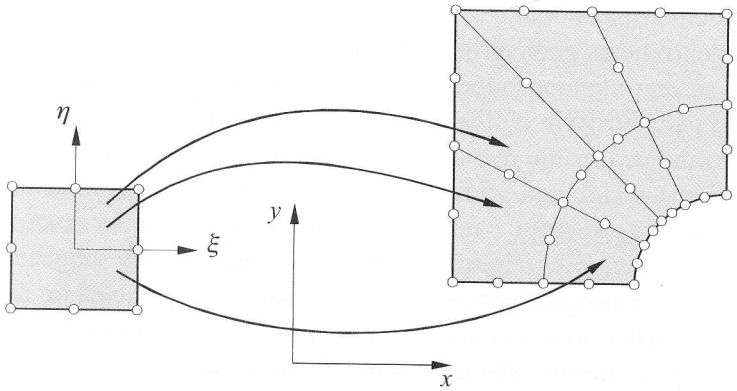
$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}. \tag{16.11}$$

Ove relacije su u matričnom zapisu jednake

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{16.12}$$

gdje je **J** Jacobijeva matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{16.13}$$



Slika 16.4. Preslikavanje izvornog elementa u realni proračunski model

Nakon invertiranja (16.12), derivacije po Kartezijevim koordinatama su jednake

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{16.14}$$

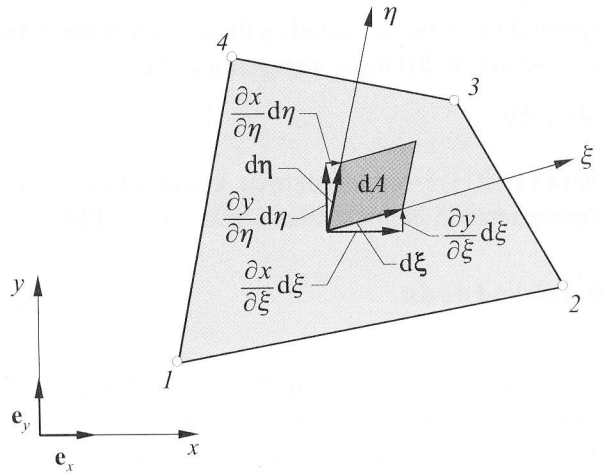
Na taj su način derivacije funkcija oblika u izrazu za matricu **B**

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \tag{16.15}$$

a Jacobijeva matrica za četverokutni element s četiri čvora izračunava se pomoću relacija (16.5) i (16.7) na sljedeći način:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \tag{16.16}$$

Nije teško zaključiti da je matrica **B** koja povezuje deformaciju u elementu i pomake u čvorovima, također funkcija prirodnih koordinata, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\xi,\eta)$. Na taj način podintegralne funkcije u izrazu za matricu krutosti (8.23) funkcije su prirodnih koordinata, te je integriranje prikladno provesti po prirodnim koordinatama pri čemu su granice integracije između –1 i +1. Iz toga slijedi da se, umjesto integracije po površini distordiranoga nepravilnog elementa u Kartezijevu koordinatnom sustavu, integriranje provodi po površini kvadrata s jediničnim bezdimenzijskim koordinatama vrhova. Pritom je potrebno elementarnu površinu $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ u Kartezijevu koordinatnom sustavu prikazati pomoću prirodnih koordinata.



Slika 16.5. Elementarna površina u Kartezijevu koordinatnom sustavu

Elementarna površina dA jednaka je površini paralelograma omeđenog elementarnim vektorima $d\boldsymbol{\xi}$ i $d\boldsymbol{\eta}$ duž koordinatnih crta ξ i η, prema slici 16.5. Elementarni su vektori u Kartezijevu koordinatnom sustavu

$$d\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \, \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \, \mathbf{e}_y ,$$

$$d\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \, \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \, \mathbf{e}_y , \tag{16.17}$$

gdje su $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_y$ jedinični vektori u pravcu koordinata x i y. Površina elementarnog paralelograma dA izračunava se pomoću vektorskog umnoška vektora $d\boldsymbol{\xi}$ i $d\boldsymbol{\eta}$. Pritom je veličina rezultirajućega vektora jednaka elementarnoj površini

$$dA\mathbf{e}_z = d\boldsymbol{\xi} \times d\boldsymbol{\eta} , \tag{16.18}$$

gdje je $\mathbf{e}_z$ jedinični vektor u pravcu treće Kartezijeve koordinatne osi z. Nakon uvrštavanja (16.17) u (16.18), vektorskim množenjem se dobiva

$$dA\mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \, d\eta \, \mathbf{e}_z , \tag{16.19}$$

iz čega slijedi elementarna površina

$$dA = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \, d\eta . \tag{16.20}$$

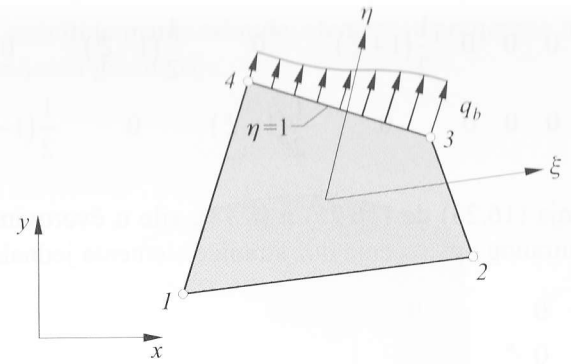
Nije teško provjeriti da je izraz u zagradi jednak determinanti Jacobijeve matrice (16.13), te se relacija (16.20) može napisati u obliku

$$dA = \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta . \tag{16.21}$$

Nakon uvrštavanja (16.21), izraz za matricu krutosti (8.23) za dvodimenzijski četverokutni izoparametarski element transformira se u oblik

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta . \tag{16.22}$$

Iako su granice integracije jedinične vrijednosti, što bi trebalo pridonijeti smanjenju složenosti izračunavanja matrice krutosti, integriranje se najčešće ne može provesti analitički zbog složenosti podintegralne funkcije. To je razlogom da se umjesto eksplicitnog određivanja matrice krutosti, integriranje provodi numerički; o tome se govori u odjeljku 16.4.



Slika 16.6. Proizvoljno kontinuirano opterećenje duž jedne stranice izoparametarskog elementa

Kada duž stranice elementa djeluje raspodijeljeno opterećenje, u posebnom slučaju kad su stranice ravne i element je pravokutan, izračunavanje se provodi pomoću relacije (8.18) na način kako je opisano u 13. poglavlju. Budući da su u izoparametarskoj formulaciji elementi najčešće iskrivljeni ili su stranice zakrivljene, za određivanje sila u čvorovima potrebno je preurediti relaciju (8.18). Kako bi se moglo provesti integriranje u lokalnom prirodnom koordinatnom sustavu, elementarnu duljinu opterećene stranice realnog elementa potrebno je prikazati u bezdimenzijskim prirodnim koordinatama. Ako je element opterećen duž stranice za koju je prirodna koordinata η konstantna, prema slici 16.6., elementarna duljina opterećene stranice opisana je u Kartezijevu koordinatnom sustavu pomoću prve relacije u izrazu (16.17). Na taj način, elementarna je površina na koju djeluje opterećenje jednaka umnošku debljine elementa h i veličine elementarnog vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$

$$\mathrm{d}S = h\left|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right| = h\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{16.23}$$

Proizvoljno opterećenje $\mathbf{q}_b$ također je potrebno prikazati kao funkciju koordinate ξ

$$\mathbf{q}_b^T = \left[q_{bx}(\xi) \quad q_{by}(\xi)\right]. \tag{16.24}$$

Pomoću relacije (16.6) za $\eta = 1$, lako je izvesti funkcije oblika za raspodjelu pomaka duž opterećenog ruba. Za vektor pomaka $\mathbf{u}_S^T = \left[u_S \quad v_S\right]$ funkcije oblika moguće je prikazati u matričnom zapisu

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix}. \quad (16.25)$$

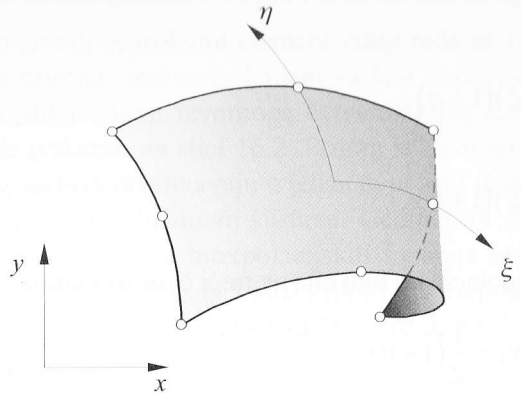
Nakon uvrštavanja (16.23) do (16.25) u (8.18), sile u čvorovima poradi proizvoljnoga kontinuiranog opterećenja duž stranice elementa jednake su

$$\mathbf{F}_S = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \\ \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{bx}(\xi) \\ q_{by}(\xi) \end{bmatrix} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, h \mathrm{d}\xi . \quad (16.26)$$

Ako opterećenje djeluje duž stranice elementa višeg reda, izračunavanje sila u čvorovima provodi se na analogan način. Podintegralne funkcije u općem slučaju su složene, pa se kao i pri izračunavanju matrice krutosti integriranje najčešće provodi numerički.

Potrebno je uočiti da su relacije (16.15) i (16.21) postojane uz uvjet nesingularnosti Jacobijeve matrice. Drugim riječima, mora biti ispunjen uvjet da Jacobijeva matrica posjeduje inverznu matricu, tj. da je njezina determinanta različita od nule. To je moguće postići ako je preslikavanje jednoznačno, što znači da svakoj točki izvornog elementa u lokalnom prirodnom koordinatnom sustavu odgovara samo jedna točka realnog elementa u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Spomenuta jednoznačnost najčešće se narušava kad su elementi jako distordirani. Za četverokutni element s četiri čvora prikazan na slici 16.1., Jacobijeva matrica je singularna ako je unutarnji kut veći od 180^0, no, nažalost, taj jednostavni kriterij nije moguće primijeniti na izoparametarske elemente višeg reda sa zakrivljenim stranicama. Element drugog reda u kojega je narušena jednoznačnost između prirodnih i Kartezijevih koordinata, prikazan je na slici 16.7. Kako bi se otkrila nedopuštena geometrija elementa, može se provesti izračunavanje njegove Jacobijeve determinante. Kad je determinanata Jacobijeve

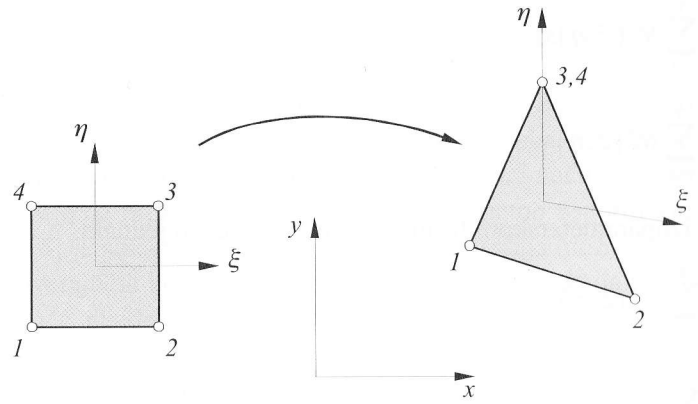
matrice jednaka nuli ili je manja od nule, element je pretjerano distordiran te mu je potrebno promijeniti geometriju.



Slika 16.7. Primjer nejednoznačnog preslikavanja kod distordiranog elementa drugog reda

16.1.2. Trokutni elementi

Trokutne izoparametarske elemente također je moguće izvesti preslikavanjem izvornoga četverokutnog elementa na način koji je sličan prethodno opisanom postupku. Pritom se dva čvora izvornog elementa preslikavaju u jedan čvor u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu, prema slici 16.8.



Slika 16.8. Preslikavanje izvornoga četverokutnog elementa u trokutni element

Geometrija trokutnog elementa opisuje se pomoću relacija (16.5) i (16.7), uz izjednačivanje koordinata trećeg i četvrtog čvora, $x_4 = x_3$, $y_4 = y_3$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + (N_3 + N_4) x_3,$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + (N_3 + N_4) y_3 . \tag{16.27}$$

Zbrajanjem funkcija oblika za treći i četvrti čvor, koje su na temelju (16.6) jednake

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \tag{16.28}$$

izračunava se interpolacijska funkcija za treći čvor trokutnog elementa

$$N_3^* = N_3 + N_4 = \frac{1}{2}(1+\eta). \tag{16.29}$$

Ostale dvije interpolacijske funkcije ostale su nepromijenjene

$$N_1^* = N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$

$$N_2^* = N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta). \tag{16.30}$$

Na taj način, geometrija izoparametarskoga trokutnog elementa s tri čvora opisana je sljedećim relacijama:

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i^*(\xi,\eta) x_i ,$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} N_i^*(\xi,\eta) y_i . \tag{16.31}$$

U skladu s izoparametarskom formulacijom, pomaci su jednaki

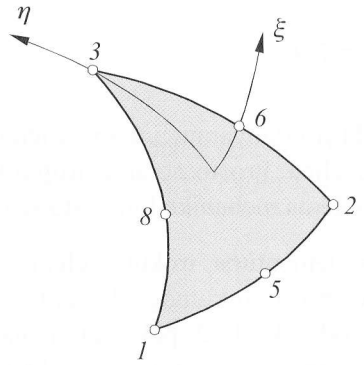
$$u = \sum_{i=1}^{3} N_i^*(\xi,\eta) u_i ,$$

$$v = \sum_{i=1}^{3} N_i^*(\xi,\eta) v_i . \tag{16.32}$$

Lako je uočiti da je tu narušena jednoznačnost preslikavanja. Naime, cijela jedna stranica između trećeg i četvrtog čvora izvornog elementa preslikava se u jednu točku u Kartezijevu koordinatnom sustavu, slika 16.8. Na taj način, u trećem čvoru s koordinatama x_3, y_3, Jacobijeva matrica je singularna. Nakon deri-

viranja po koordinatama x i y i izračunavanja matrice $\mathbf{B}$, spomenuta singularnost se izgubi. Članovi matrice $\mathbf{B}$ konstantne su vrijednosti, što upućuje na jednoliku raspodjelu deformacije i naprezanja.

Na analogan način izvodi se trokutni element višeg reda sa zakrivljenim stranicama. Tako je, na primjer, trokutni element sa šest čvorova prema slici 16.9. moguće izvesti preslikavanjem izvornoga četverokutnog serendipity elementa drugog reda koji je prikazan na slici 16.2. Pritom se čvorovi *3*, *4* i *7* iz prirodnoga koordinatnog sustava preslikavaju u jedan čvor koji je označen brojem *3* u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Geometrija zajedno s raspodjelom pomaka opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija koje se izračunavaju pomoću relacija (13.55), (13.56) i (13.60). Pritom je interpolacijska funkcija za treći čvor jednaka zbroju funkcija oblika za čvorove *3*, *4* i *7* izvornog elementa u prirodnom koordinatnom sustavu.



Slika 16.9. Izoparametarski trokutni element drugog reda

U općem slučaju pri izvođenju trokutnih elemenata višeg reda može doći do gubitka prostorne izotropije, što znači da je polje pomaka, a na taj način i matrica krutosti, ovisno o orijentaciji koordinatnog sustava i načinu numeriranja čvorova. Poznato je da prostorna anizotropija može znatno usporiti konvergenciju rješenja. U [14] je pokazano da se prostorna anizotropija može eliminirati dodavanjem odgovarajućih korekcijskih članova pojedinim funkcijama oblika. Na taj se način izvode sljedeće interpolacijske funkcije za izoparametarski trokutni element drugog reda:

$$N_1^* = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)+\Delta N^*,$$

$$N_2^* = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)+\Delta N^*,$$

$$= \frac{1}{2}\eta(1+\eta),$$

$$= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) - 2\Delta N^*, \qquad (16.33)$$

$$= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2),$$

$$= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2),$$

* korekcijski član u svrhu eliminiranja prostorne anizotropije, koji je jednak

$$= \frac{1}{8}(1-\xi^2)(1-\eta^2). \qquad (16.34)$$

napomenuti da u odgovarajućim specifičnim problemima prostorna a može biti poželjna. Prostorno anizotropni konačni elementi primje- rješavanje problema mehanike loma, što se ovdje neće razmatrati.

četverokutnim elementima, trokutne elemente također je moguće iz- kavanjem izvornoga trokutnog elementa definiranog u prirodnom om sustavu. U odjeljku 10.2. pokazano je na koji je način proizvoljni artezijevu koordinatnom sustavu moguće transformirati u jedinični isti način, preslikavanjem jediničnog trokuta, izvodi se proizvoljni balnom Kartezijevu koordinatnom sustavu.

acija (10.10) koje je kraće moguće zapisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{3} L_i x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{3} L_i y_i, \qquad (16.35)$$

opisati geometriju osnovnoga trokutnog elementa s proizvoljnim po- prova x_i, y_i. L_i su prirodne površinske ili trokutne koordinate koje funkcijama oblika osnovnoga trokutnog elementa (6.51) u Kartezije- atnom sustavu. Budući da površinske koordinate nisu međusobno to u izoparametarskoj formulaciji uvjetuje singularnost Jacobijeve rebno ih je prikazati pomoću neovisnih prirodnih koordinata. U od-

jeljku 10.2. pokazano je da su za jedinični trokut u prirodnom lokalnom koordinatnom sustavu ξ, η površinske koordinate jednake

$$L_1 = 1 - \xi - \eta\,,$$

$$L_2 = \xi\,, \tag{16.36}$$

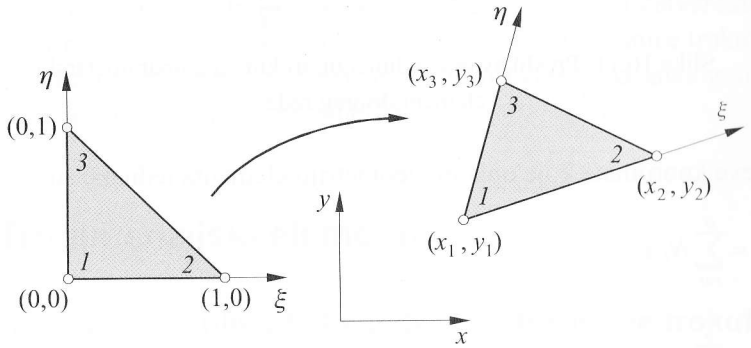
$$L_3 = \eta\,.$$

Na taj se način geometrija elementa u Kartezijevu koordinatnom sustavu opisuje relacijama

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i\, x_i\,,$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} N_i\, y_i\,, \tag{16.37}$$

gdje su funkcije preslikavanja N_i jednake izrazima (16.36). Na slici 16.10. prikazan je proizvoljni trokutni element s tri čvora koji je izveden preslikavanjem jediničnoga trokutnog elementa.



Slika 16.10. Preslikavanje izvornoga jediničnog elementa u proizvoljni trokut

U skladu s izoparametarskom formulacijom, komponente pomaka jednake su

$$u = \sum_{i=1}^{3} N_i\, u_i\,,$$

$$v = \sum_{i=1}^{3} N_i\, v_i\,. \tag{16.38}$$

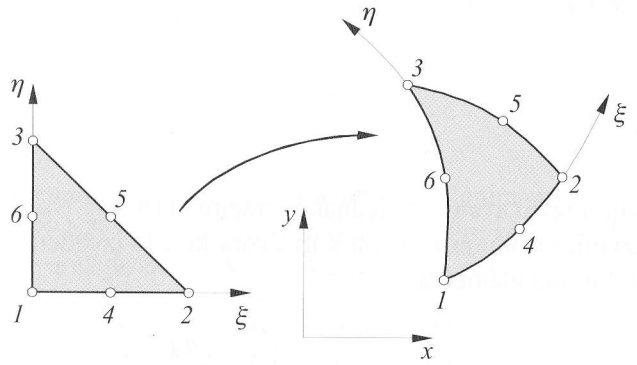
Preslikavanjem jediničnog trokuta sa šest čvorova prema slici 16.11., izvodi se izoparametarski trokutni element drugog reda. Funkcije preslikavanja jednake su funkcijama oblika koje su opisane relacijama (13.23) i (13.24). Tako za čvorove prema slici 16.11. vrijede relacije

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \qquad N_2 = L_2(2L_2 - 1),$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1), \qquad N_4 = 4L_1L_2, \tag{16.39}$$

$$N_5 = 4L_2L_3, \qquad N_6 = 4L_1L_3,$$

gdje su površinske koordinate jednake izrazima (16.36).



Slika 16.11. Preslikavanje jediničnog trokuta u izoparametarski element drugog reda

Kartezijeve koordinate koje opisuju geometriju elementa jednake su

$$x = \sum_{i=1}^{6} N_i x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{6} N_i y_i. \tag{16.40}$$

Analognim relacijama opisano je polje pomaka

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i,$$

$$v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i. \tag{16.41}$$

Deriviranje interpolacijskih funkcija po međusobno neovisnim prirodnim koordinatama provodi se primjenom poznatoga lančanog pravila

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi}, \tag{16.42}$$

što je na temelju (16.36) jednako

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}. \tag{16.43}$$

Analogno vrijedi za derivaciju po koordinati η

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = -\frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}. \tag{16.44}$$

Matrica krutosti izračunava se analogno relaciji (16.22) uz promjenu granica integracije. Integriranje po koordinati ξ od 0 je do 1, a granice integracije za koordinatu η su 0 i $1-\xi$

$$\mathbf{k} = \int_{\xi=0}^{1} \int_{\eta=0}^{1-\xi} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi. \tag{16.45}$$

Zbog složenosti podintegralnih funkcija, i ovdje se, kao i za četverokutne elemente, integriranje najčešće provodi numerički. Kada duž stranice trokuta djeluje kontinuirano opterećenje, izračunavanje sila u čvorovima analogno je postupku koji je opisan u prethodnom odjeljku.

16.2. Trodimenzijski elementi

16.2.1. Elementi u obliku heksaedra i distordirane trokutne prizme

Izoparametarska formulacija trodimenzijskih elemenata analogna je prethodno opisanoj dvodimenzijskoj formulaciji. Za opisivanje geometrije, dvije Kartezijeve koordinate x i y proširuju se trećom koordinatom z. Komponente pomaka u, v i w u pravcu globalnih Kartezijevih koordinatnih osi opisuju polje pomaka. Na taj način, uvođenjem treće dimenzije četverokut prelazi u heksaedar, a trokut u tetraedarski element.

Geometriju heksaedra u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu moguće je dobiti preslikavanjem izvornog elementa u obliku kocke s jediničnim koordi-

natama čvorova iz lokalnog prirodnoga koordinatnog sustava ξ, η, ζ. Relacije koje opisuju geometriju proizvoljnoga heksaedarskog elementa s 8 čvorova prema slici 16.12. jednake su

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i,$$

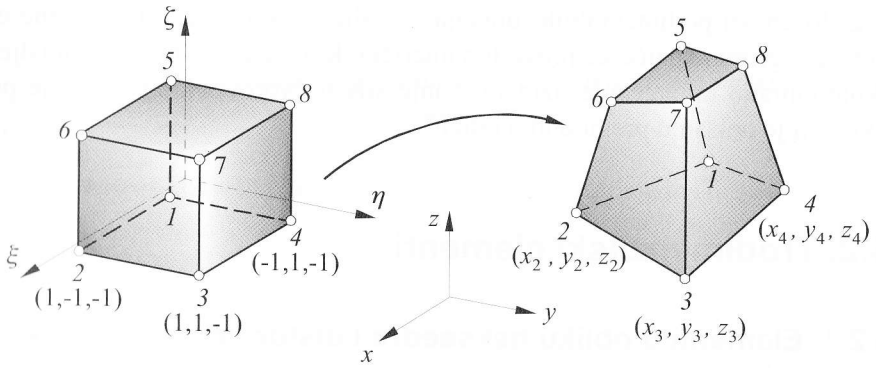
$$y = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i, \tag{16.46}$$

$$z = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i,$$

gdje su funkcije preslikavanja jednake funkcijama oblika osnovnoga prizmatičnog elementa

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \tag{16.47}$$

s koordinatama čvorova ξ_i, η_i, ζ_i. Nije teško uočiti da su relacije (16.46) i (16.47) jednake izrazima (10.38) i (10.39), koji opisuju preslikavanje proizvoljnog heksaedra iz globalnog u lokalni koordinatni sustav.



Slika 16.12. Osnovni izoparametarski heksaedarski element

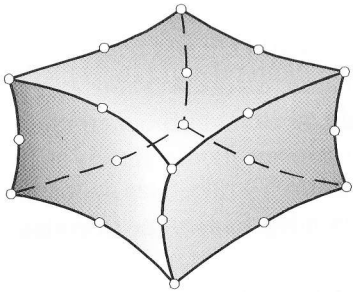
U skladu s izoparametarskom formulacijom, komponente su pomaka u pravcu globalnih Kartezijevih koordinata

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)u_i,$$

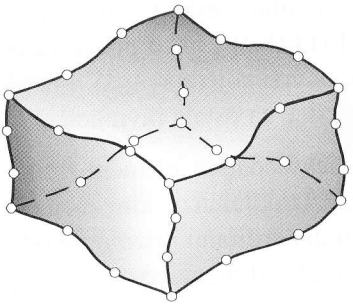
$$v = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i, \qquad (16.48)$$

$$w = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)w_i,$$

gdje su u_i, v_i i w_i pomaci u i-tom čvoru konačnog elementa. Analogno se izvode heksaedarski elementi višeg reda kojima su plohe u općem slučaju zakrivljene. Preslikavanjem serendipity elementa drugog reda, čija je geometrija u lokalnom koordinatnom sustavu jednaka kocki također s jediničnim koordinatama vrhova, izvodi se heksaedarski element drugog reda prema slici 16.13. Pritom su funkcije preslikavanja jednake interpolacijskim funkcijama (14.41) do (14.44). Na isti način, preslikavanjem serendipity elementa trećeg reda pomoću interpolacijskih funkcija (14.45) do (14.48), izvodi se element trećeg reda prikazan na slici 16.14.



Slika 16.13. Heksaedarski element drugog reda



Slika 16.14. Heksaedarski element trećeg reda

Interpolacijske funkcije deriviraju se po Kartezijevim koordinatama prema sljedećim relacijama:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \tag{16.49}$$

gdje je Jacobijeva matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \tag{16.50}$$

Elementarni je volumen analogno relaciji (16.21) jednak

$$\mathrm{d}V = \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta, \tag{16.51}$$

pa se na temelju (8.15) matrica krutosti za izoparametarski heksaedarski element izračunava trostrukim integriranjem po prirodnim koordinatama

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta. \tag{16.52}$$

Čvorne sile zbog vanjskoga volumenskog i površinskog opterećenja izračunavaju se pomoću relacija (8.17) i (8.18). Ako površinsko opterećenje djeluje u ravnini ξ, η, elementarna je površina jednaka $\mathrm{d}S = \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Analogno se izračunavaju elementarne površine za ostale ravnine heksaedarskog elementa.

Opisani izoparametarski heksaedarski element često se u analizi konstrukcija primjenjuje u kombinaciji s trodimenzijskim elementom u obliku distordirane trokutne prizme. Trokutnu distordiranu prizmu također je moguće izvesti preslikavanjem kocke iz lokalnog bezdimenzijskoga koordinatnog sustava u Kartezijeve koordinate, pri čemu se po dva čvora u vrhovima gornje i donje plohe preslikavaju u po jedan čvor, slika 16.15. Na taj način, geometrija elementa opisana je pomoću relacija (16.46) uz izjednačivanje koordinata 3. i 4. te 7. i 8. čvora. Nakon izjednačivanja spomenutih koordinata, izrazi za opisivanje geometrije mogu se napisati u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i^* x_i + \sum_{i=5}^{7} N_i^* x_i ,$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} N_i^* y_i + \sum_{i=5}^{7} N_i^* y_i , \qquad (16.53)$$

$$z = \sum_{i=1}^{3} N_i^* z_i + \sum_{i=5}^{7} N_i^* z_i ,$$

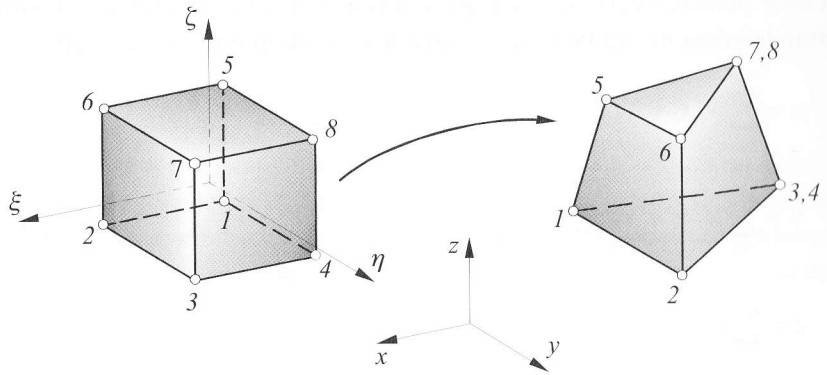
gdje su interpolacijske funkcije

$$N_i^* = N_i \quad \text{za} \quad i = 1,2,5,6 ,$$

$$N_3^* = N_3 + N_4 , \qquad (16.54)$$

$$N_7^* = N_7 + N_8 .$$

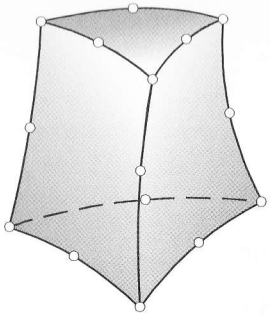
Funkcije N_i izračunavaju se pomoću relacija (16.47). Pomaci su opisani pomoću relacija koje su analogne izrazima (16.53) uz zamjenu Kartezijevih koordinata pripadnim komponentama pomaka. Budući da se ploha između čvorova *3*, *4*, *7* i *8* preslikava u globalnomu koordinatnom sustavu u dužinu omeđenu čvorovima *3* i *7*, determinanta Jacobijeve matrice po toj dužini jednaka je nuli. Isto kao za dvodimenzijske elemente, i ovdje singularnost nestane nakon deriviranja po Kartezijevim koordinatama.



Slika 16.15. Trodimenzijski element u obliku distordirane trokutne prizme

Na analogan način, preslikavanjem izvornog serendipity elementa drugog reda, izvodi se element drugog reda u obliku distordirane trokutne prizme sa zakrivljenim plohama prema slici 16.16. Pritom se ploha, koja je omeđena s 8 čvorova, iz lokalnog u globalni Kartezijev koordinatni sustav preslikava u krivulju

koja je opisana s 3 čvora. Funkcije preslikavanja izračunavaju se pomoću relacija (14.41) do (14.44).



Slika 16.16. Element drugog reda u obliku distordirane trokutne prizme sa zakrivljenim plohama

16.2.2. Tetraedarski elementi

Preslikavanjem kocke s jediničnim koordinatama vrhova iz lokalnog prirodnoga koordinatnog sustava, moguće je u globalnim Kartezijevim koordinatama izvesti i trodimenzijske tetraedarske elemente. Više čvorova preslikava se u jedan čvor, pri čemu kocka prelazi u tetraedar. Osnovni element u obliku kocke s 8 čvorova koji je prikazan na slikama 16.12. i 16.15., moguće je u globalnomu koordinatnom sustavu preslikati u osnovni tetraedarski element s 4 čvora prema slici 16.17. Pritom se čvorovi *5*, *6*, *7* i *8* preslikavaju u jedan čvor, a također u jedan čvor prelaze i čvorovi *3* i *4*, pa je u relacijama (16.46) njihove koordinate potrebno izjednačiti. Na taj se način izvode izrazi koji opisuju geometriju

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i^* x_i + N_5^* x_5 ,$$

$$y = \sum_{i=1}^{3} N_i^* y_i + N_5^* y_5 , \qquad (16.55)$$

$$z = \sum_{i=1}^{3} N_i^* z_i + N_5^* z_5 ,$$

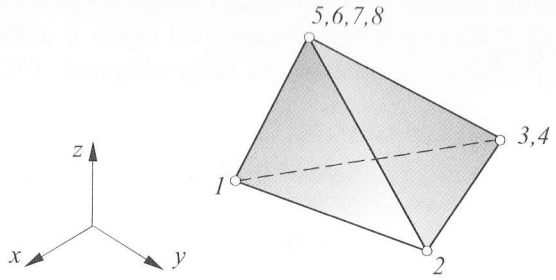
sa sljedećim interpolacijskim funkcijama:

$$N_i^* = N_i \quad \text{za} \quad i = 1,2 .$$

$$N_3^* = N_3 + N_4 . \qquad (16.56)$$

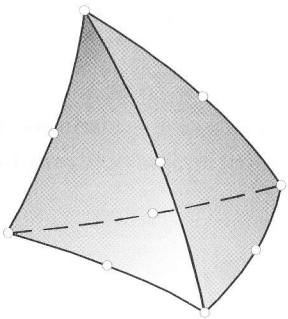
$$N_5^* = N_5 + N_6 + N_7 + N_8,$$

koje se određuju pomoću relacije (16.47). Zamjenom koordinata x, y i z u (16.55) s komponentama pomaka u, v i w, određuje se polje pomaka.



Slika 16.17. Izoparametarski tetraedarski element

Analogno se pomoću kockastog serendipity elementa drugog reda izvodi tetraedarski element sa zakrivljenim plohama prikazan na slici 16.18.



Slika 16.18. Izoparametarski tetraedarski element drugog reda

Osim gore opisanog postupka, tetraedarske elemente u globalnomu koordinatnom sustavu moguće je izvesti preslikavanjem jediničnog tetraedra iz lokalnoga koordinatnog sustava na način koji je analogan izvođenju trokutnih elemenata. Za osnovni tetraedarski element s 4 čvora prema slici 16.19., geometrija se opisuje pomoću Kartezijevih koordinata u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i, \qquad (16.57)$$

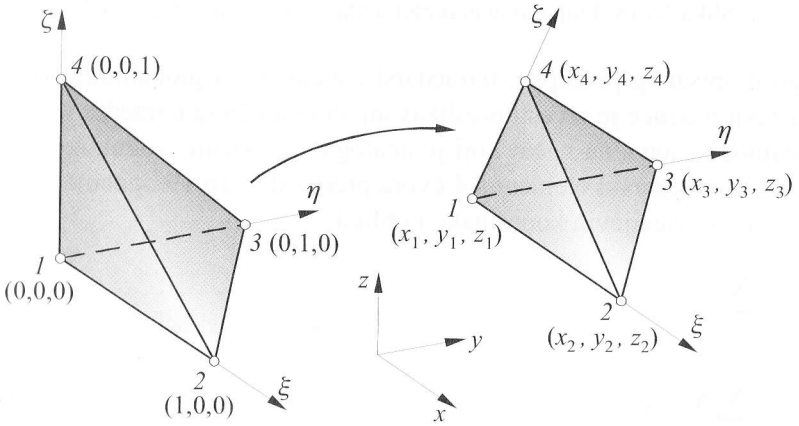
$$z = \sum_{i=1}^{4} N_i z_i ,$$

gdje su funkcije preslikavanja N_i jednake volumenskim koordinatama L_i jediničnog tetraedra

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta , \\ L_2 &= \xi , \\ L_3 &= \eta , \\ L_4 &= \zeta . \end{aligned} \tag{16.58}$$

Nije teško provjeriti da su relacije (16.57), uz supstituciju $N_i = L_i$ i (16.58), jednake izrazima (10.34) koji neposredno opisuju vezu između Kartezijevih i neovisnih prirodnih koordinata. Polje pomaka opisano je, na isti način kao i geometrija, pomoću sljedećih relacija:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{4} N_i u_i , \\ v &= \sum_{i=1}^{4} N_i v_i , \\ w &= \sum_{i=1}^{4} N_i w_i . \end{aligned} \tag{16.59}$$

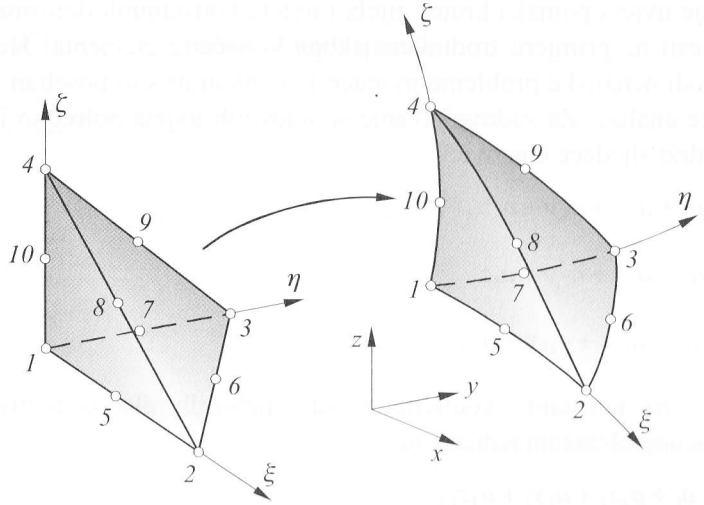


Slika 16.19. Preslikavanje jediničnog tetraedra u proizvoljni tetraedarski element

Izoparametarski tetraedarski element drugog reda sa zakrivljenim plohama izvodi se preslikavanjem jediničnoga tetraedarskog elementa s 10 čvorova, prema slici 16.20. Geometrija i polje pomaka opisani su relacijama koje su analogne izrazima (16.57) i (16.59), pri čemu je razlika samo u broju čvorova. Umjesto četiri, sada je 10 interpolacijskih funkcija koje su također definirane u volumenskim koordinatama, a mogu se preuzeti iz odjeljka 14.3. Na temelju relacija (14.22) do (14.26), interpolacijske su funkcije za čvorove prema slici 16.20. jednake:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= L_1(2L_1 - 1), & N_6 &= 4L_2L_3, \\
N_2 &= L_2(2L_2 - 1), & N_7 &= 4L_1L_3, \\
N_3 &= L_3(2L_3 - 1), & N_8 &= 4L_2L_4, \\
N_4 &= L_4(2L_4 - 1), & N_9 &= 4L_3L_4, \\
N_5 &= 4L_1L_2, & N_{10} &= 4L_1L_4.
\end{aligned}
\tag{16.60}
$$

Volumenske koordinate L_i odnose se na jedinični tetraedar, a prikazane su pomoću neovisnih prirodnih koordinata u relacijama (16.58). Elementi višeg reda izvode se na analogan način preslikavanjem jediničnih tetraedarskih elemenata višeg reda.



Slika 16.20. Izoparametarski tetraedarski element drugog reda izveden preslikavanjem jediničnog tetraedra

Deriviranje interpolacijskih funkcija po neovisnim prirodnim koordinatama provodi se primjenom lančanog pravila kao što je opisano u odjeljku 16.1.2. Matrica krutosti izračunava se integriranjem po volumenu jediničnog tetraedra na sljedeći način:

$$\mathbf{k} = \int_{\xi=0}^{1} \int_{\eta=0}^{1-\xi} \int_{\zeta=0}^{1-\xi-\eta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, \mathrm{d}\zeta \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi \,. \tag{16.61}$$

Kao što je već spomenuto, umjesto eksplicitnog određivanja matrice krutosti, i tu se integriranje najčešće provodi numerički.

16.3. Konvergencija izoparametarskih elemenata

Kao i za elemente pravilnih geometrijskih oblika koji su opisani u prethodnim poglavljima, kako bi rješenje pomoću izoparametarskih elemenata moglo konvergirati, potrebno je da budu zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata. Osim toga, potrebno je da se mogu opisati pomaci krutog tijela i polje konstantne deformacije. Uvjet kompatibilnosti zadovoljen je ako susjedni elementi duž zajedničkog ruba imaju iste čvorove i ako su im rubovi zajedno s pomacima jednoznačno opisani s istim interpolacijskim funkcijama. Ako su uvjeti kompatibilnosti interpolacijskih funkcija zadovoljeni za izvorne elemente, onda su u općem slučaju ti uvjeti također zadovoljeni i za realne izoparametarske elemente u globalnim Kartezijevim koordinatama.

Razmatranje uvjeta pomaka krutog tijela i uvjeta konstantnih deformacija uputno je provesti na primjeru trodimenzijskoga konačnog elementa. Jednodimenzijske i dvodimenzijske probleme moguće je razmatrati kao poseban slučaj trodimenzijske analize. Za zadovoljavanje spomenutih uvjeta potrebno je da polje pomaka sadrži sljedeće članove:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \,, \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \,, \\ w &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z \,, \end{aligned} \tag{16.62}$$

gdje su $a_1 \ldots a_{12}$ konstantni koeficijenti. Na temelju tih relacija, pomaci u i-tom čvoru konačnog elementa jednaki su

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i \,, \\ v_i &= a_5 + a_6 x_i + a_7 y_i + a_8 z_i \,, \end{aligned} \tag{16.63}$$

$$w_i = a_9 + a_{10}x_i + a_{11}y_i + a_{12}z_i .$$

Kako bi uvjeti pomaka krutog tijela i konstantnih deformacija bili zadovoljeni, potrebno je pokazati da su pomoću pomaka u čvorovima koji su prikazani relacijama (16.63), unutar elementa pomaci opisani izrazima (16.62). Pritom se, u skladu s izoparametarskom formulacijom, polazi od interpolacijskih funkcija za raspodjelu pomaka

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i , \qquad v = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i , \qquad w = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i , \tag{16.64}$$

gdje je n broj čvorova konačnog elementa. Nakon uvrštavanja (16.63) u (16.64), dobiva se

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} N_i x_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} N_i y_i + a_4 \sum_{i=1}^{n} N_i z_i , \\ v &= a_5 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_6 \sum_{i=1}^{n} N_i x_i + a_7 \sum_{i=1}^{n} N_i y_i + a_8 \sum_{i=1}^{n} N_i z_i , \\ w &= a_9 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_{10} \sum_{i=1}^{n} N_i x_i + a_{11} \sum_{i=1}^{n} N_i y_i + a_{12} \sum_{i=1}^{n} N_i z_i . \end{aligned} \tag{16.65}$$

Budući da za izoparametarske konačne elemente vrijede relacije

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i , \qquad y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i , \qquad z = \sum_{i=1}^{n} N_i z_i , \tag{16.66}$$

izraze (16.65) moguće je transformirati u oblik

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_2 x + a_3 y + a_4 z , \\ v &= a_5 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_6 x + a_7 y + a_8 z , \\ w &= a_9 \sum_{i=1}^{n} N_i + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z . \end{aligned} \tag{16.67}$$

Nakon usporedbe ovih relacija sa (16.62), nije teško zaključiti kako je za ispunjavanje uvjeta pomaka krutog tijela i uvjeta konstantnih deformacija potrebno zadovoljiti uvjet

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 . \tag{16.68}$$

Lako je uočiti da je na temelju poznatih svojstava funkcija oblika ovaj uvjet ispunjen u čvorovima konačnih elemenata, no potrebno je naglasiti da u ispravnoj izoparametarskoj formulaciji relacija (16.68) mora biti zadovoljena i u svakoj drugoj točki konačnog elementa. Iz izraza (16.68) korisno je izvesti sljedeće relacije koje vrijede za derivacije funkcija oblika

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=0\,,\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=0\,,\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}=0\,. \tag{16.69}$$

Konvergenciju izoparametarskih elemenata moguće je postići ako su elementi dopuštenih geometrijskih oblika, što znači da nisu jako iskrivljeni, odnosno distordirani. Poznato je da je prilikom usitnjavanja mreže u područjima s većim gradijentom naprezanja, distorziju elemenata teško izbjeći. U slučaju jednolike mreže s elementima dopuštenih geometrijskih oblika, brzina konvergencije u velikoj mjeri ovisi i o stupnju potpunosti interpolacijskih polinoma, što je opisano u odjeljku 8.3.

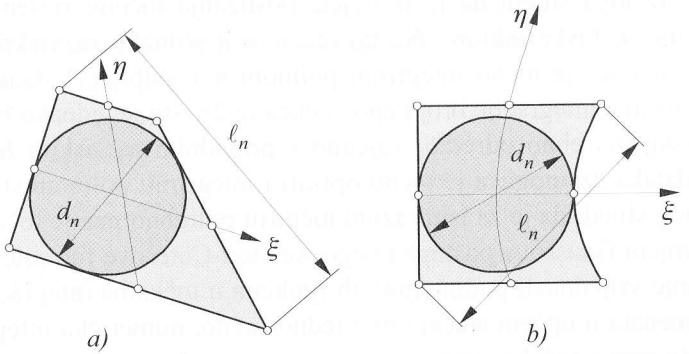
Kako bi se smanjila greška poradi nepravilne geometrije izoparametarskih konačnih elemenata, korisno je definirati mjeru dopuštene distordiranosti. U [14] naveden je parametar koji određuje distordiranost, a jednak je omjeru najveće udaljenosti ℓ_n između čvorova elementa i promjera d_n najveće kružnice ili kugle koje je u elementu moguće upisati. Na taj je način za proizvoljni n-ti element mjera za distordiranost

$$\delta_n=\frac{\ell_n}{d_n}\,, \tag{16.70}$$

što mora biti manje od dopuštene vrijednosti δ_{dop} $\left(\delta_n \le \delta_{\text{dop}}\right)$, čiji iznos ovisi o formulaciji konačnog elementa. Osim toga, omjer duljina najveće i najmanje stranice četverokuta u dvodimenzijskoj analizi, odnosno heksaedra kod trodimenzijskih problema, mora također biti u dopuštenim granicama. Radi boljeg razumijevanja, na primjeru dvodimenzijskog serendipity elementa s osam čvorova, na slici 16.21. prikazana su dva osnovna oblika distorzije s označenim veličinama ℓ_n i d_n. Prikazana distordiranost poradi zakrivljenosti jedne od stranica elementa pojavljuje se kad je potrebno opisati zakrivljeni rub proračunskog modela. U praksi je česta kutna distorzija u kombinaciji sa zakrivljenim stranicama konačnog elementa.

Istraživanja su pokazala da pojedini konačni elementi nakon distorzije ne mogu više u Kartezijevim koordinatama opisati funkciju pomaka istog reda kao što je bio slučaj kad su ti elementi imali pravilan geometrijski oblik. Drugim riječima, stupanj polinoma funkcije pomaka koji je moguće opisati pomoću konačnih elemenata, može se smanjiti zbog njihove geometrijske distorzije. U [17] poka-

zano je da funkcija pomaka dvodimenzijskoga distordiranog serendipity elementa s 8 čvorova, koji je prikazan na slici 16.21a, sadrži samo linearne članove x i y, što znači da su se ostali članovi x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, prilikom distorzije izgubili. Nasuprot tome, na isti način distordirani Lagrangeov element s 9 čvorova sadrži sve članove koji pripadaju potpunom polinomu drugog stupnja. Na taj je način u proračunskom modelu za postizanje iste točnosti potrebno znatno više serendipity elemenata. Naravno, to vrijedi samo u slučaju kad su elementi kutno distordirani prema slici 16.21a. U slučaju distorzije kad je jedna stranica elementa zakrivljena prema slici 16.21b, stupanj polinoma funkcije pomaka smanjuje se i kod Lagrangeove i kod serendipity formulacije. Naime, na taj način distordirani i Lagrangeovi i serendipity elementi drugog reda mogu u Kartezijevu koordinatnom sustavu točno opisati samo linearno polje pomaka.



Slika 16.21. Dvodimenzijski distordirani konačni elementi: a) kutna distorzija, b) distorzija poradi jedne zakrivljene stranice

Iz navedenog slijedi da se razlikuju elementi koji su manje ili više osjetljivi na promjenu geometrijskog oblika. Ta je osjetljivost osobito izražena pri gruboj diskretizaciji. S usitnjavanjem mreže, odnosno s povećavanjem broja elemenata, smanjuje se razlika između rješenja dobivenih pomoću elemenata različito osjetljivih na distorziju. Nije potrebno posebno naglašavati da je cilj svakoga proračuna sa što manje elemenata, odnosno sa što manjim brojem stupnjeva slobode proračunskog modela, približiti se što više točnom rješenju.

16.4. Numerička integracija

Numerička integracija primjenjuje se u slučaju kad su podintegralne funkcije složene, te je na taj način analitički postupak eksplicitnog određivanja integrala dosta mukotrpan. U metodi konačnih elemenata složenost podintegralnih funkcija naglašena je pri rješavanju osnosimetričnih problema, a posebno dolazi do

izražaja u formulaciji izoparametarskih konačnih elemenata. Postupak numeričke integracije temelji se na zbrajanju podintegralnih funkcija u odgovarajućim točkama u području integracije, pri čemu se izračunate vrijednosti funkcija množe s odgovarajućim faktorima. Spomenute točke u kojima se izračunavaju vrijednosti podintegralne funkcije nazivaju se točke integracije, a faktori s kojima se te funkcije množe težinski su faktori. Točnost integriranja u općem slučaju ovisi o položaju točaka integracije i o iznosu težinskih faktora, a oba podatka određuju se iz uvjeta da je vrijednost integrala za definirane podintegralne funkcije točna.

U literaturi se najčešće spominju Newton-Cotesov i Gaussov postupak numeričke integracije. Newton-Cotesova formula temelji se na pretpostavci da je položaj točaka integracije unaprijed zadan, tj. jednak je razmak između svih točaka integracije. Iz toga slijedi da je iz uvjeta postizanja točnog rješenja potrebno odrediti samo težinske faktore. Na taj način, s n jednako razmaknutih točaka integracije moguće je točno integrirati polinom n-1 stupnja. U Gaussovu postupku za n točaka integracije broj nepoznanica je $2n$, što je jednako broju točaka čiji je položaj potrebno odrediti, zajedno s pripadnim težinskim faktorima. S brojem podataka $2n$ moguće je točno opisati i integrirati polinom stupnja $2n$-1. Iz navedenog slijedi da je za istu razinu točnosti potrebno manje točaka integracije pri primjeni Gaussova postupka nego Newton-Cotesove formule. Budući da izračunavanje vrijednosti podintegralnih funkcija u točkama integracije kod konačnih elemenata u općem slučaju nije jednostavno, numerička integracija koja se temelji na manje točaka integracije ima znatne prednosti. To je razlog da se u metodi konačnih elemenata daje prednost Gaussovu postupku koji se razmatra u sljedećem izlaganju.

Zbog boljeg razumijevanja numeričkog integriranja, korisno je najprije razmotriti jednodimenzijske probleme. Ako se zbog općenitosti podintegralna funkcija označi s $F = F(\xi)$, gdje je ξ prirodna bezdimenzijska koordinata, njezin integral u granicama od –1 do +1 jednak je

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i F(\xi_i), \tag{16.71}$$

gdje je n broj točaka integracije, a w_i su težinski faktori. Kao što je prikazano u [14], funkciju $F(\xi)$ moguće je prikazati pomoću njezinih vrijednosti u n točaka $F_i = F(\xi_i)$ i Lagrangeovih polinoma $l_i(\xi)$. Interpolacijski polinom koji opisuje funkciju $F(\xi)$ jednak je

$$\psi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F_i\, l_i(\xi). \tag{16.72}$$

Formulacija Lagrangeovih interpolacijskih polinoma opisana je u odjeljku 11.1. Za određivanje položaja točaka integracije uvodi se polinom n-tog stupnja

$$P(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_n)\,. \tag{16.73}$$

Nije teško zaključiti da je u točkama integracije ξ_1, $\xi_2,\ldots,\xi_n$ funkcija $P(\xi)$ jednaka nuli. Sada se funkcija $F(\xi)$ može prikazati u obliku

$$F(\xi)=\psi(\xi)+P(\xi)(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+\cdots+\beta_{n-1}\xi^{n-1})\,, \tag{16.74}$$

čiji je integral jednak

$$\int_{-1}^{1}F(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{n}F_i\left[\int_{-1}^{1}l_i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\left[\int_{-1}^{1}\xi^k P(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right], \tag{16.75}$$

gdje su β_k konstantni koeficijenti. Nakon uspoređivanja (16.75) sa (16.71), dobivaju se sljedeće relacije:

$$\int_{-1}^{1}\xi^k P(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0\,,\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1, \tag{16.76}$$

$$w_i=\int_{-1}^{1}l_i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,\qquad i=1,2,\cdots,n\,, \tag{16.77}$$

koje određuju položaj točaka integracije i pripadne težinske faktore. Točke integracije ξ_i, $i=1,2,\cdots,n$ izračunavaju se pomoću (16.76), a relacija (16.77) opisuje težinske faktore.

Koordinate koje određuju položaj 8 točaka integracije ($n=1$ do 8) s pripadnim težinskim faktorima za jednodimenzijsku integraciju u granicama od –1 do 1, prikazane su u tablici 16.1. Lako je uočiti da je položaj točaka integracije simetričan s obzirom na ishodište bezdimenzijske koordinate te je za $\xi=\pm\xi_i$ jednak iznos težinskih faktora. Vrijednosti u tablici preuzete su iz [118].

Opisani postupak jednodimenzijske integracije primjenjuje se i za rješavanje dvodimenzijskih i trodimenzijskih problema. Pritom se, analogno analitičkom postupku, rješavanje provodi uzastopnim jednodimenzijskim integriranjem u pravcu zadanih koordinata, pri čemu se varijable po kojima se ne provodi integriranje drže konstantnima. Postupak je korisno prikazati na primjeru dvodimenzijskoga četverokutnog elementa, za koji se integriranje provodi u pravcu prirodnih koordinata ξ i η s granicama integracije –1 i 1. I ovdje će se zbog jednostavnosti razmatrati podintegralna funkcija $F(\xi,\eta)$, koja u formulaciji konačnih elemenata može biti proizvoljni član matrice krutosti ili vektora vanjskog opterećenja. Na taj je način dvodimenzijski integral jednak

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{i=1}^{ni} w_i\,F(\xi_i,\eta)\right)\mathrm{d}\eta = \sum_{j=1}^{nj} w_j\left(\sum_{i=1}^{ni} w_i\,F(\xi_i,\eta_j)\right) \tag{16.78}$$

$$= \sum_{j=1}^{nj}\sum_{i=1}^{ni} w_j\,w_i\,F(\xi_i,\eta_j).$$

n	Koordinate ξ_i	Težinski faktori w_i
1	0,000000000000000	2,000000000000000
2	±0,577350269189626	1,000000000000000
3	±0,774596669241483	0,555555555555556
	0,000000000000000	0,888888888888889
4	±0,861136311594053	0,347854845137454
	±0,339981043584856	0,652145154862546
5	±0,906179845938664	0,236926885056189
	±0,538469310105683	0,478628670499366
	0,000000000000000	0,568888888888889
6	±0,932469514203152	0,171324492379170
	±0,661209386466265	0,360761573048139
	±0,238619186083197	0,467913934572691
7	±0,949107912342759	0,129484966168870
	±0,741531185599394	0,279705391489277
	±0,405845151377397	0,381830050505119
	±0,000000000000000	0,417959183673469
8	±0,960289856497536	0,101228536290376
	±0,796666477413627	0,222381034453374
	±0,525532409916329	0,313706645877887
	±0,183434642495650	0,362683783378362

Tablica 16.1. Koordinate točaka s pripadnim težinskim faktorima za jednodimenzijsku Gaussovu integraciju

Kao što je ovdje prikazano, najprije je provedeno rješavanje unutarnjeg integrala po varijabli ξ, pri čemu se varijabla η smatrala konstantom, a nakon toga se rješavao vanjski integral po varijabli η. Položaj točaka integracije i težinski faktori određuju se na temelju podataka iz tablice 16.1. za jednodimenzijsku integraciju, pri čemu za svaki pravac integracije vrijedi da je s n točaka moguće točno integrirati polinom do $2n$-1 stupnja. Uvođenjem dvodimenzijskoga težin-

skog faktora w_{ij}, koji je jednak umnošku jednodimenzijskih faktora, $w_{ij} = w_i w_j$, dvodimenzijski integral može se napisati u obliku

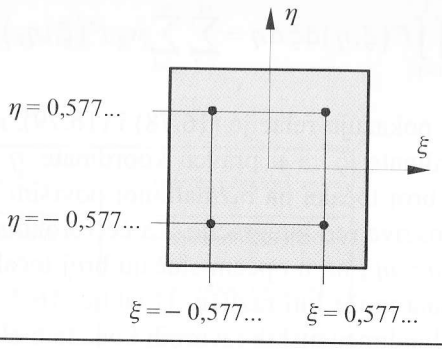
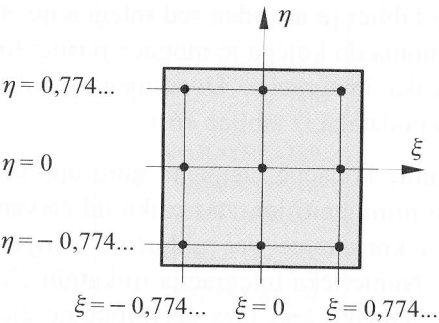
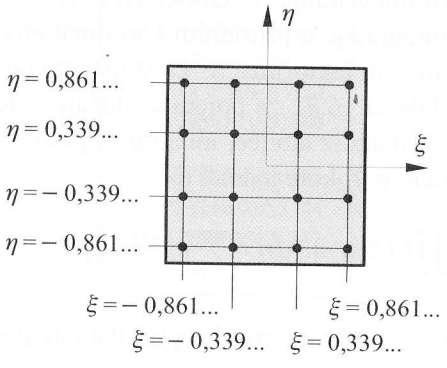
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{ni}\sum_{j=1}^{nj} w_{ij}\,F(\xi_i,\eta_j)\,. \tag{16.79}$$

Kao što pokazuju relacije (16.78) i (16.79), *ni* je broj točaka integracije u pravcu koordinate ξ, a u pravcu koordinate η broj točaka je *nj*. Na taj je način ukupan broj točaka na razmatranoj površini konačnog elementa *ni* x *nj*, što se obično naziva red integracije. Za četverokutne izoparametarske elemente najčešće je $ni = nj$, no u općem slučaju broj točaka integracije u pravcu spomenutih koordinata može biti različit. U tablici 16.2. ucrtane su točke integracije za nekoliko dvodimenzijskih izvornih konačnih elemenata u izoparametarskoj formulaciji. U tablici je naveden red integracije, stupanj točnosti koji je jednak stupnju polinoma do kojega je moguće postići točno rješenje te su označene koordinate točaka integracije. Dvodimenzijski težinski faktori w_{ij} izračunavaju se pomoću podataka iz tablice 16.1.

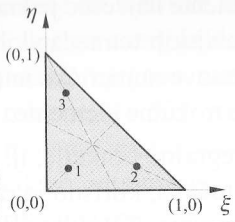
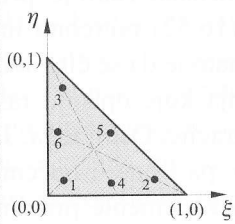
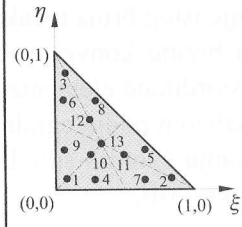
Za trokutne konačne elemente gore opisani postupak integriranja ne može se direktno primijeniti jer, za razliku od četverokutnih elemenata, granice integracije nisu konstantne već uključuju varijable, što se može vidjeti iz relacije (16.45). Numerička integracija trokutnih elemenata ovdje se neće posebno razmatrati. Jednako kao i za četverokutne elemente, daje se prednost Gaussovu postupku integriranja. U tablici 16.3. za Gaussov postupak prikazan je položaj točaka integracije u prirodnim koordinatama ξ_i, η_i u jediničnom trokutu, zajedno s težinskim faktorima w_i za izoparametarske formulacije različitog reda. Isto kao i u tablici 16.2., za pojedine slučajeve naveden je i stupanj točnosti. Na temelju podataka iz tablice, integral za podintegralnu funkciju $F(\xi,\eta)$ po površini jediničnog trokuta jednak je

$$\int\int F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n} w_i\,F(\xi_i,\eta_i)\,. \tag{16.80}$$

Ovdje *n* označuje ukupan broj točaka integracije.

Red integracije $ni \times nj$	Stupanj točnosti	Položaj točaka integracije
2×2	3	
3×3	5	
4×4	7	

Tablica 16.2. Gaussova numerička integracija za područje četverokutnog elementa

Stupanj točnosti	Točke integracije	Koordinate ξ_i	Koordinate η_i	Težinski faktori w_i
2		$\xi_1 = 0{,}166666666667$ $\xi_2 = 0{,}666666666667$ $\xi_3 = \xi_1$	$\eta_1 = \xi_1$ $\eta_2 = \xi_1$ $\eta_3 = \xi_2$	$w_1 = 0{,}166666666665$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$
5		$\xi_1 = 0{,}101286507323 5$ $\xi_2 = 0{,}797426985353 1$ $\xi_3 = \xi_1$ $\xi_4 = 0{,}470142064105 1$ $\xi_5 = \xi_4$ $\xi_6 = 0{,}059715871789 8$ $\xi_7 = 0{,}333333333333$	$\eta_1 = \xi_1$ $\eta_2 = \xi_1$ $\eta_3 = \xi_2$ $\eta_4 = \xi_6$ $\eta_5 = \xi_4$ $\eta_6 = \xi_4$ $\eta_7 = \xi_7$	$w_1 = 0{,}062969590272 4$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0{,}066197076394 3$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = 0{,}1125$
7		$\xi_1 = 0{,}065130102902 2$ $\xi_2 = 0{,}869739794195 6$ $\xi_3 = \xi_1$ $\xi_4 = 0{,}312865496004 9$ $\xi_5 = 0{,}638444188569 8$ $\xi_6 = 0{,}048690315425 3$ $\xi_7 = \xi_5$ $\xi_8 = \xi_4$ $\xi_9 = \xi_6$ $\xi_{10} = 0{,}260345966079 0$ $\xi_{11} = 0{,}479308067841 9$ $\xi_{12} = \xi_{10}$ $\xi_{13} = 0{,}333333333333$	$\eta_1 = \xi_1$ $\eta_2 = \xi_1$ $\eta_3 = \xi_2$ $\eta_4 = \xi_6$ $\eta_5 = \xi_4$ $\eta_6 = \xi_5$ $\eta_7 = \xi_6$ $\eta_8 = \xi_5$ $\eta_9 = \xi_4$ $\eta_{10} = \xi_{10}$ $\eta_{11} = \xi_{10}$ $\eta_{12} = \xi_{11}$ $\eta_{13} = \xi_{13}$	$w_1 = 0{,}026673617804 4$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0{,}038556880445 2$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = w_4$ $w_8 = w_4$ $w_9 = w_4$ $w_{10} = 0{,}087807628716 6$ $w_{11} = w_{10}$ $w_{12} = w_{10}$ $w_{13} = -0{,}074785022233 9$

Tablica 16.3. Gaussova numerička integracija za područje trokutnog elementa

Trodimenzijska integracija provodi se na analogan način. Nakon uvođenja treće koordinate, analogno relaciji (16.79), trodimenzijski integral za izračunavanje matrica heksaedarskih izoparametarskih elemenata jednak je

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{ni}\sum_{j=1}^{nj}\sum_{k=1}^{nk} w_{ijk}\,F(\xi_i,\eta_j,\zeta_k), \tag{16.81}$$

gdje je w_{ijk} trodimenzijski težinski faktor koji je jednak produktu jednodimenzijskih faktora u pravcu koordinata ξ, η i ζ, $w_{ijk} = w_i w_j w_k$. Za razliku od dvodimenzijskih problema, ovdje se provodi zbrajanje i u pravcu treće koordinate ζ, gdje je broj točaka integracije nk. Na taj je način ukupan broj točaka integracije ni

x *nj* x *nk*, što u odnosu na dvodimenzijske probleme znatno povećava vrijeme izračunavanja. I ovdje je potrebno napomenuti da je broj točaka integracije u pravcu koordinatnih osi za heksaedarske izoparametarske elemente najčešće jednak, mada u općem slučaju može biti i različit. Matrice trodimenzijskih tetraedarskih elemenata također se najčešće izračunavaju primjenom Gaussove numeričke integracije, na način koji je analogan postupku za izoparametarske trokutne elemente.

Budući da broj točaka integracije ovisi o redu podintegralne funkcije, tj. da bi se točno integrirao polinom $2n$-1 stupnja potrebno je n točaka, korisno je razmotriti podintegralne funkcije u formulaciji konačnih elemenata. Tako je, primjerice, za izračunavanje matrice krutosti prema (16.22) i (16.52) potrebno integrirati članove podintegralne matrice $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\det\mathbf{J}$. Poznato je da se članovi matrice **B** izračunavaju deriviranjem interpolacijskih funkcija koje opisuju raspodjelu pomaka, i na taj način te funkcije utječu na red integracije. Osim toga, Jacobijeva matrica za distordirane elemente nije konstantna, pa i ona u općem slučaju pridonosi povećanju reda podintegralnih funkcija. Za elemente pravilnih geometrijskih oblika članovi Jacobijeve matrice su konstantni, što upućuje na zaključak da je za distordirane elemente za točno izračunavanje matrice krutosti potrebno više točaka numeričke integracije. Analize su pokazale da ako je distorzija elemenata u dopuštenim granicama, zadržavanje istog broja točaka integracije kao i za nedistordirani element ne utječe na brzinu konvergencije niti smanjuje točnost rješenja. Nasuprot tome, za jako distordirane elemente potrebno je povećati red integracije. Na analogan način, analizom podintegralnih matrica određuje se broj točaka integracije pri izračunavanju čvornih sila. U praksi se najčešće uzima isti red integracije kao i za matricu krutosti.

Nije teško zaključiti da veliki broj točaka integracije koji je često potreban za točno izračunavanje matrica u formulaciji konačnih elemenata, znatno utječe na povećanje troškova izračunavanja. To je razlogom da se u praksi često nastoji smanjiti red numeričke integracije, a da se pritom ne naruši potrebna točnost. Valja uočiti da smanjenje točnosti pri izračunavanju matrica konačnog elementa može pridonijeti povećanju točnosti rješenja dobivenog proračunskim modelom. Naime, poznato je da je mreža konačnih elemenata, koji se temelje na metodi pomaka, kruća od realne konstrukcije, što znači da se izračunavaju pomaci manji od realnih. Približnim izračunavanjem matrice krutosti, tj. primjenom integriranja s manje točaka integracije, moguće je smanjiti krutost konstrukcije te se postojećom mrežom više približiti točnom rješenju. Numerička integracija s manjim brojem točaka od broja koji je potreban za točno izračunavanje matrica konačnih elemenata u literaturi se naziva reducirana integracija. Osim reducirane integracije, u odgovarajućim slučajevima rabi se i selektivna integracija. Selektivna integracija je postupak pri kojemu se odgovarajući dijelovi matrice krutosti integriraju s različitim redom integracije.

I u reduciranoj i u selektivnoj integraciji, premalen broj točaka integracije može ugroziti konvergenciju rješenja. Poznato je kako je nužan uvjet za postizanje konvergencije da element može opisati polje konstantne deformacije, što znači da u tom slučaju energija deformiranja konačnog elementa mora biti konstantna te na taj način njegova matrica krutosti mora imati konstantnu vrijednost. Na temelju relacije (16.52), za konstantan iznos podintegralnog produkta matrica $\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}$, moguće je izračunati konstantnu vrijednost matrice krutosti ako je točno provedeno integriranje po elementarnom volumenu $\mathrm{d}V = \det\mathbf{J}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$. Drugim riječima, polje konstantne deformacije u konačnom elementu moguće je opisati ako je broj točaka integracije dovoljan za točno izračunavanje volumena konačnog elementa. Osim toga, red integracije mora biti dovoljan da se ne pojavi singularnost matrice krutosti koja može ugroziti rješavanje sustava jednadžbi. Naime, premalen broj točaka integracije može uvjetovati da matrica krutosti konačnog elementa ima veći broj nultih vlastitih vrijednosti nego što odgovara pomacima krutog tijela. Budući da je u tom slučaju sve pomake koji odgovaraju nultim vlastitim vrijednostima u složenim konstrukcijama teško ograničiti, singularnost matrice krutosti gotovo je neizbježna.

17. KONAČNI ELEMENTI ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA SAVIJANJA PLOČA

Ploče su poseban slučaj trodimenzijskoga kontinuuma kad je jedna dimenzija, koja opisuje debljinu ploče, mnogo manja od ostalih dimenzija. Primjena trodimenzijskih konačnih elemenata za njihovu analizu, osim što veže sa sobom veliki broj stupnjeva slobode i čini proračun skupim, najčešće dovodi do znatnih numeričkih poteškoća koje onemogućuju približavanje točnom rješenju. To je razlog da se izvode posebni konačni elementi koji se temelje na pretpostavkama uvedenim pri izvođenju relacija u poznatoj teoriji savijanja ploča [49, 111].

Ovdje se razmatraju konačni elementi temeljeni na Kirchoff-Loveovoj teoriji tankih ploča čije su osnovne relacije prikazane u odjeljku 3.6. Deformiranje je opisano pomakom u pravcu normale na srednju plohu koji je u formulaciji konačnih elemenata jedina neovisna varijabla. Problem savijanja tankostjene ploče svodi na rješavanje diferencijalne jednadžbe četvrtog reda, što upućuje na činjenicu da je najveća derivacija drugog reda u podintegralnoj funkciji pripadne potencijalne energije. Iz toga slijedi da je u problemu savijanja ploča potrebno zadovoljiti C^1-kontinuitet, što znači da je duž zajedničkih rubova susjednih elemenata, koji opisuju pločasti kontinuum, potrebno zadovoljiti kontinuitet pomaka i njegovih derivacija. Drugim riječima, raspodjela pomaka i njegovih derivacija duž rubova konačnih elemenata mora biti jednoznačno opisana pomoću stupnjeva slobode u pripadnim čvorovima. To često nije jednostavno postići pa je razvijen veći broj elemenata koji omogućuju samo kontinuitet pomaka. Raspodjelu nagiba duž rubova nije moguće jednoznačno opisati, što te elemente svrstava u grupu nekonformnih elemenata. Usprkos spomenutom nedostatku, pomoću tih elemenata moguće je postići konvergenciju rješenja jer je zadovoljen potreban uvjet za konvergenciju nekonformnih elemenata. Zadovoljavanje C^1-kontinuiteta, što čini elemente konformnim, zahtijeva znatno složeniju formulaciju.

S obzirom na mogućnosti zadovoljavanja potrebnih uvjeta kompatibilnosti, za rješavanje problema savijanja ploča primjenjuju se konformni i nekonformni

konačni elementi. U odnosu na geometriju, razlikuju se pravokutni, trokutni te proizvoljni četverokutni elementi koji se najčešće izvode spajanjem trokutnih elemenata, pri čemu se unutarnji stupnjevi slobode eliminiraju numeričkim postupkom statičke kondenzacije [91, 118]. Ovdje će se prikazati osnovne formulacije nekonformnih i konformnih pravokutnih i trokutnih konačnih elemenata, koje najčešće nalaze primjenu u analizi tankostjenih pločastih konstrukcija.

17.1. Pravokutni konačni elementi

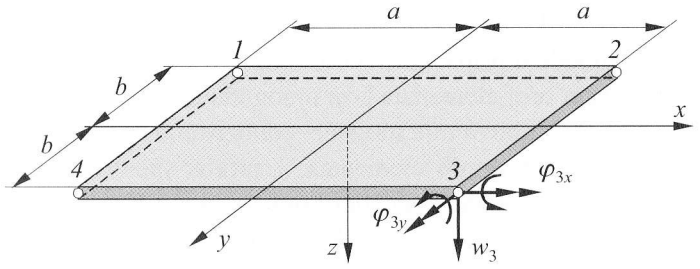
17.1.1. Pravokutni nekonformni element s 12 stupnjeva slobode

Osnovni pravokutni element za rješavanje problema savijanja ploča nekonformni je element s 12 stupnjeva slobode. Sastoji se od četiri čvora u vrhovima pravokutnika, a stupnjevi slobode su pomaci u pravcu normale na ravninu ploče i kutovi zakreta normale oko koordinatnih osi koje leže u ravnini ploče, slika 17.1. Na taj je način vektor stupnjeva slobode jednak

$$\mathbf{v}^T = \left[w_1 \quad \varphi_{1x} \quad \varphi_{1y} \quad w_2 \quad \varphi_{2x} \quad \varphi_{2y} \quad w_3 \quad \varphi_{3x} \quad \varphi_{3y} \quad w_4 \quad \varphi_{4x} \quad \varphi_{4y} \right], \tag{17.1}$$

gdje su w_i pomaci, a φ_{ix} i φ_{iy} kutovi zakreta u čvorovima elementa, koji su opisani derivacijama pomaka po koordinatama x i y

$$\varphi_{ix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i ,$$
$$\varphi_{iy} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i . \tag{17.2}$$



Slika 17.1. Pravokutni pločasti element s 12 stupnjeva slobode

Funkcija pomaka opisana je nepotpunim polinomom 4. stupnja

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + \\ + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3, \tag{17.3}$$

što je u matričnom zapisu jednako

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}: \quad w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix}. \tag{17.4}$$

Postavljanjem rubnih uvjeta za čvorove s koordinatama $x = x_i$ i $y = y_i$ $(i = 1,\ldots,4)$ prema relacijama

$$w_i = (w)_{x_i, y_i},$$
$$\varphi_{ix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x_i, y_i}, \tag{17.5}$$
$$\varphi_{iy} = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x_i, y_i}.$$

izvodi se izraz koji povezuje stupnjeve slobode i koeficijente polinoma, $\mathbf{v} = \mathbf{C}\,\mathbf{a}$, odakle slijedi matrica $\mathbf{C}$ u obliku

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & 3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix}. \tag{17.6}$$

Nakon uvrštavanja vrijednosti za koordinate čvorova prema slici 17.1. i invertiranja matrice $\mathbf{C}$, prema relaciji $\mathbf{N} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{C}^{-1}$ izračunava se matrica funkcija oblika koju je prikladno zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \tag{17.7}$$

gdje je

$$\mathbf{N}_i^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} (1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(2+\xi\xi_i+\eta\eta_i-\xi^2-\eta^2) \\ -b\eta_i(1+\eta\eta_i)^2(1-\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i) \\ a\xi_i(1+\xi\xi_i)^2(1-\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \end{bmatrix}, \quad i=1,\ldots,4, \qquad (17.8)$$

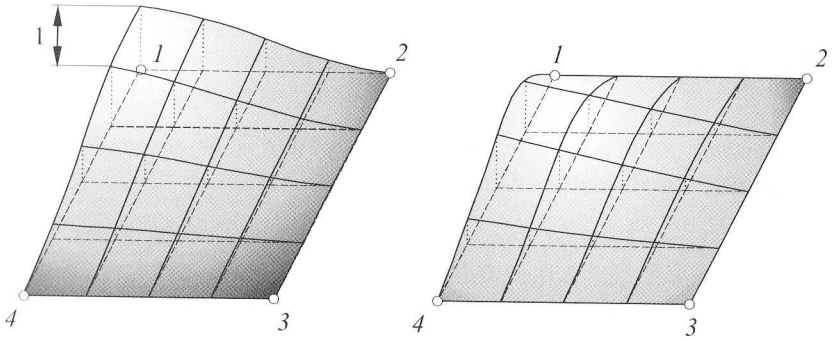
s bezdimenzijskim koordinatama $\xi = \frac{x}{a}$ i $\eta = \frac{y}{b}$. Pripadni vektor stupnjeva slobode u relaciji $\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}$ sada je zapisan u obliku

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}, \qquad (17.9)$$

gdje je

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} w_i & \varphi_{ix} & \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \qquad i=1,\ldots,4. \qquad (17.10)$$

Funkcije oblika za pomak w_1 i kut zakreta φ_{1x} u čvoru *1* prikazani su na slici 17.2. Grafički prikaz funkcije oblika za stupanj slobode φ_{1y} analogan je prikazanoj funkciji za φ_{1x}. Tim interpolacijskim funkcijama analogne su funkcije oblika koje su pridružene ostalim čvorovima.



Slika 17.2. Funkcije oblika za stupnjeve slobode w_1 i φ_{1x}

Kod problema savijanja ploča komponente vektora deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$ opisuju zakrivljenost deformirane srednje plohe ploče, što je detaljnije opisano u odjeljku 3.6., gdje je kinematički diferencijalni operator prikazan relacijom (3.119). Na taj način, matrica **B** izračunava se deriviranjem funkcija oblika prema relaciji

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \tag{17.11}$$

iz koje slijedi izraz u obliku

$$\mathbf{B} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial x\,\partial y} & 2\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial x\,\partial y} & 2\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_3}{\partial x\,\partial y} & 2\dfrac{\partial^2 \mathbf{N}_4}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix}. \tag{17.12}$$

Uz pretpostavku izotropnog materijala, gdje je matrica elastičnosti **D** opisana izrazom (3.121), matrica krutosti za element prema slici 17.1. izračunava se pomoću relacije

$$\mathbf{k} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, dx dy. \tag{17.13}$$

Sile i momenti, pridruženi stupnjevima slobode konačnog elementa, zapisuju se analogno vektoru pomaka u obliku

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} F_{1z} & M_{1x} & M_{1y} & F_{2z} & M_{2x} & M_{2y} & F_{3z} & M_{3x} & M_{3y} & F_{4z} & M_{4x} & M_{4y} \end{bmatrix}. \tag{17.14}$$

Elementi za rješavanje problema savijanja ploča najčešće su opterećeni površinskim opterećenjem koje je potrebno preračunati u sile i momente savijanja u čvorovima. Za površinsko opterećenje $q_z(x,y)$, vektor čvornih sila na temelju relacije (8.18) jednak je

$$\mathbf{F}_S = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathbf{N}^T q_z(x,y)\, dx\, dy. \tag{17.15}$$

Za slučaj konstantnoga površinskog opterećenja $q_z(x,y) = q_0$, nakon uvrštavanja matrice funkcija oblika prema relacijama (17.7) i (17.8) u izraz (17.15), integriranjem se dobiva

$$\mathbf{F}_S^T = q_0 ab\left[1 \quad \frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad \frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3}\right] \tag{17.16}$$

Nakon određivanja matrice krutosti konačnog elementa i vektora čvornih sila, pristupa se formiranju globalne jednadžbe za proračunski model. Izračunavanjem globalnog vektora pomaka određuje se deformirani oblik diskretizirane konstrukcije. Za procjenu stanja naprezanja potrebno je izračunati unutarnje veličine koje se za svaki konačni element određuju pomoću relacije $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathbf{v}$. Kao što je prikazano u odjeljku 3.6., članovi vektora naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ momenti su savijanja M_x, M_y i moment uvijanja M_{xy}. Za ovdje prikazani konačni element, momenti savijanja M_x i M_y mijenjaju se linearno duž pravaca paralelnih s osima x ili y, dok je promjena momenta uvijanja M_{xy} po paraboli drugog reda. U praksi se njihove vrijednosti najčešće određuju u čvorovima ili u težištu konačnog elementa.

Kako bi se prosudila valjanost ovdje opisanoga pravokutnog elementa s 12 stupnjeva slobode, potrebno je razmotriti uvjete konvergencije. Na temelju polinoma funkcije pomaka, nije teško zaključiti da su zahtjevi za opisivanjem polja konstantne deformacije i pomaka krutog tijela u potpunosti zadovoljeni. Ovdje se polje konstantne deformacije svodi na konstantne zakrivljenosti, odnosno konstantne druge derivacije pomaka w po koordinatama koje leže u srednjoj ravnini ploče.

Potrebno je pobliže se osvrnuti na uvjete kompatibilnosti. Kao što je u uvodnom dijelu spomenuto, duž rubova između susjednih elemenata potrebno je zadovoljiti C^1-kontinuitet, što znači da je potrebno zadovoljiti kontinuitet pomaka i njegovih prvih derivacija. Na temelju funkcije pomaka (17.3), nije teško zaključiti da je promjena pomaka duž rubova opisana parabolom trećeg reda koja se jednoznačno može odrediti s 4 podatka. Budući da su svakom rubu u čvorovima pridruženi pomaci zajedno s derivacijama, raspodjela pomaka jednoznačno je opisana te je na taj način kontinuitet pomaka zadovoljen. Osim toga, jednoznačno je opisana i promjena prve derivacije pomaka po koordinati koja je paralelna s rubom. Prva derivacija pomaka po koordinati koja je okomita na rub mijenja se po paraboli trećeg reda, a za njezino opisivanje samo su dva podatka na raspolaganju (u svakom pripadnom čvoru po jedan nagib). Tako, na primjer, za rub $x = a$ prema slici 17.1. za definiranje spomenute krivulje raspoloživi podaci su samo kutovi zakreta φ_{2y} i φ_{3y} u čvorovima *2* i *3*. Iz toga slijedi da se promjena nagiba u pravcu normale na rub ovdje prikazanoga konačnog elementa ne može opisati jednoznačno, što narušava uvjete kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata i svrstava element u grupu nekonformnih elemenata. Usprkos tom nedostatku, moguće je postići konvergenciju rješenja jer su ispunjeni uvjeti za konvergenciju nekonformnih elemenata, što je moguće dokazati "patch" testom.

Drugi je nedostatak koji pridonosi smanjenju brzine konvergencije nepotpunost polinoma funkcije pomaka, što se vidi iz Pascalova trokuta na slici 9.2. Usprkos spomenutim nedostacima, pomoću opisanoga pravokutnog elementa moguće je uz dovoljan broj stupnjeva slobode proračunskog modela postići zadovoljavajuća rješenja, što element čini prihvatljivim za primjenu u inženjerskoj praksi.

17.1.2. Pravokutni konformni element sa 16 stupnjeva slobode

Da bi gore opisani pravokutni element mogao zadovoljiti sve potrebne uvjete kompatibilnosti, potrebno mu je povećati broj stupnjeva slobode. Naime, da bi se duž rubova elementa postigao C^1-kontinuitet funkcije pomaka, potrebno je svakom čvoru dodati mješovitu drugu derivaciju $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Na taj se način dobiva pravokutni konformni konačni element s 4 čvora s po 4 stupnja slobode. Funkcija pomaka je nepotpuni polinom sa 16 članova

$$\begin{aligned} w(x,y) = {} & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + \\ & a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} x^2 y^2 + a_{13} xy^3 + a_{14} x^3 y^2 + \\ & + a_{15} x^2 y^3 + a_{16} x^3 y^3, \end{aligned} \tag{17.17}$$

što odgovara bikubičnoj interpolaciji, koja je u Pascalovu trokutu prikazana na slici 13.16. Umjesto stupnjeva slobode φ_{ix} i φ_{iy} elementa prikazanog u prethodnom odjeljku, ovdje su svakom čvoru pridružene derivacije pomaka $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ koje se zajedno s mješovitom drugom derivacijom mogu prikazati u obliku vektora na sljedeći način:

$$\mathbf{v}_i^T = \left[w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i \right] \qquad i = 1,\ldots,4. \tag{17.18}$$

Stupnjevi slobode elementa zapisuju se pomoću vektora prema relaciji (17.9).

Nije teško provjeriti da je uz funkciju pomaka, duž rubova elementa moguće jednoznačno opisati i promjenu kutova zakreta, što taj element čini konformnim. Iz izraza (17.17) vidi se da su pomaci duž rubova, zajedno s prvim derivacijama po koordinatama koje su na njih okomite, opisani parabolama trećeg reda koje se jednoznačno mogu odrediti pomoću stupnjeva slobode u pripadnim čvorovima. Mogućnost jednoznačnog određivanja derivacije pomaka korisno je prikazati na primjeru jednog ruba. Primjerice, za geometriju elementa prema

slici 17.1. duž ruba $x = a$ između čvorova *2* i *3*, derivacija pomaka po koordinati koja je okomita na rub, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, parabola je trećeg reda koja se može jednoznačno opisati pomoću stupnjeva slobode $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ u spomenutim čvorovima.

Valja napomenuti da mješovita druga derivacija kao stupanj slobode može činiti poteškoće pri opisivanju konstrukcija s naglom promjenom debljine ploče. Na tim mjestima dolazi do promjene mješovite druge derivacije pomaka, koja se uz izjednačivanje stupnjeva slobode u čvorovima ne može opisati ovim elementom.

Bikubična interpolacija koja je sadržana u funkciji pomaka (17.17) upućuje na mogućnost neposrednog izvođenja funkcija oblika pomoću Hermiteovih interpolacijskih polinoma koji su detaljno opisani u odjeljku 11.2. Funkcije oblika jednake su produktu jednodimenzijskih Hermiteovih polinoma trećeg stupnja koji se izvode na način opisan u odjeljku 11.2. Za geometriju elementa prema slici 17.1., za pravce koordinata x i y izvode se Hermiteovi polinomi koje je prikladno zapisati pomoću bezdimenzijskih prirodnih koordinata $\xi = \dfrac{x}{a}$ i $\eta = \dfrac{y}{b}$ na sljedeći način:

$$H_{01}^1(\xi) = \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right), \qquad H_{01}^1(\eta) = \frac{1}{4}\left(2 - 3\eta + \eta^3\right),$$

$$H_{11}^1(\xi) = \frac{a}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right), \qquad H_{11}^1(\eta) = \frac{b}{4}\left(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3\right),$$

$$H_{02}^1(\xi) = \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right), \qquad H_{02}^1(\eta) = \frac{1}{4}\left(2 + 3\eta - \eta^3\right), \qquad (17.19)$$

$$H_{12}^1(\xi) = \frac{a}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right), \qquad H_{12}^1(\eta) = \frac{b}{4}\left(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3\right).$$

Kombinacijom ovih relacija izvode se funkcije oblika za pojedine stupnjeve slobode konačnog elementa, pri čemu treba voditi računa o njihovim već poznatim svojstvima. Matricu funkcija oblika zgodno je, kao i u prethodnom odjeljku, prikazati pomoću submatrica

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}, \qquad (17.20)$$

gdje su svakoj submatrici $\mathbf{N}_i$ pridruženi vektori stupnjeva slobode $\mathbf{v}_i$ prikazani relacijom (17.18). Funkcije oblika jednake su

$$\mathbf{N}_1^T = \begin{bmatrix} H_{01}^1(\xi)\ H_{01}^1(\eta) \\ H_{11}^1(\xi)\ H_{01}^1(\eta) \\ H_{01}^1(\xi)\ H_{11}^1(\eta) \\ H_{11}^1(\xi)\ H_{11}^1(\eta) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N}_2^T = \begin{bmatrix} H_{02}^1(\xi)\ H_{01}^1(\eta) \\ H_{12}^1(\xi)\ H_{01}^1(\eta) \\ H_{02}^1(\xi)\ H_{11}^1(\eta) \\ H_{12}^1(\xi)\ H_{11}^1(\eta) \end{bmatrix}, \tag{17.21}$$

$$\mathbf{N}_3^T = \begin{bmatrix} H_{02}^1(\xi)\ H_{02}^1(\eta) \\ H_{12}^1(\xi)\ H_{02}^1(\eta) \\ H_{02}^1(\xi)\ H_{12}^1(\eta) \\ H_{12}^1(\xi)\ H_{12}^1(\eta) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N}_4^T = \begin{bmatrix} H_{01}^1(\xi)\ H_{02}^1(\eta) \\ H_{11}^1(\xi)\ H_{02}^1(\eta) \\ H_{01}^1(\xi)\ H_{12}^1(\eta) \\ H_{11}^1(\xi)\ H_{12}^1(\eta) \end{bmatrix}. \tag{17.22}$$

Pomoću prikazanih funkcija oblika, na način opisan u prethodnom odjeljku, izvode se sve ostale matrice potrebne za potpuno definiranje konačnog elementa.

17.2. Trokutni konačni elementi

17.2.1. Trokutni nekonformni elementi

Jednostavni nekonformni element, koji se često primjenjuje u analizi pločastih konstrukcija, trokutni je element s 9 stupnjeva slobode, prema slici 17.3. Stupnjevi slobode su pomak i kutovi zakreta u vrhovima trokuta. Analogno pravokutnom elementu, opisani su vektorom

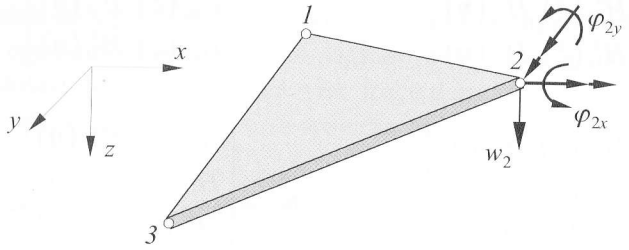
$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}, \tag{17.23}$$

gdje je

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,3. \tag{17.24}$$

Budući da potpuni polinom trećeg stupnja ima ukupno 10 članova, a na raspolaganju je samo 9 stupnjeva slobode, funkcija pomaka opisana je polinomom uz izjednačivanje koeficijenata u članovima koji sadrže x^2y i xy^2 u obliku

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3. \quad (17.25)$$



Slika 17.3. Trokutni pločasti element s 9 stupnjeva slobode

Na taj je način sačuvana simetrija članova polinoma zajedno s mogućnošću zadovoljavanja uvjeta konstantnih deformacija koje su pri rješavanju problema savijanja ploča opisane konstantnim zakrivljenostima. Uz zadovoljavanje kontinuiteta pomaka, zahtjev za kontinuitetom nagiba duž rubova elementa nije moguće ispuniti, što element čini nekonformnim. Promjena pomaka duž rubova opisana je parabolom trećega reda koju je moguće jednoznačno definirati pomoću stupnjeva slobode u pridruženim čvorovima. Nagib, odnosno prva derivacija pomaka po normali na rub $\frac{\partial w}{\partial n}$, mijenja se po paraboli drugoga reda koju nije moguće jednoznačno opisati s dva raspoloživa podatka u čvorovima koji omeđuju rub. Usprkos spomenutim nedostacima, moguće je postići konvergenciju rješenja.

Nedostatak prikazanog elementa s 9 stupnjeva slobode je neposjedovanje geometrijske invarijantnosti, što je posljedica izjednačivanja koeficijenata u potpunom polinomu trećeg stupnja. Naime, za neke orijentacije stranica trokuta u odnosu na koordinatne osi x i y, matrica $\mathbf{C}$ postaje singularna. To se događa kad element ima oblik pravokutnoga trokuta sa stranicama paralelnim s koordinatnim osima. Taj nedostatak moguće je otkloniti dodavanjem jednog čvora u težištu elementa s pomakom w, što čini ukupno 10 stupnjeva slobode i dopušta primjenu potpunog polinoma trećeg stupnja. Usprkos potpunom polinomu funkcije pomaka, postiže se loša konvergencija rješenja, što je razlogom da se ovaj element rijetko rabi u praksi.

Eliminiranje spomenutog nedostatka moguće je postići primjenom bezdimenzijskih trokutnih koordinata. Na temelju kriterija konstantnih zakrivljenosti, u [18] je izvedena funkcija pomaka u obliku

$$w = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + a_4\left(L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + a_5\left(L_3^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) +$$
$$+ a_6\left(L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + a_7\left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + a_8\left(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + \quad (17.26)$$
$$+ a_9\left(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right).$$

Promjena pomaka duž rubova elementa ostaje po paraboli trećega reda koju je moguće jednoznačno opisati sa stupnjevima slobode u pripadnim čvorovima. Kvadratna raspodjela nagiba u pravcu normale također je ostala nepromijenjena, koju za razliku od pomaka nije moguće jednoznačno definirati raspoloživim podacima. Analogno postupku koji je opisan u prethodnom odjeljku za pravokutni element, izvodi se matrica funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 \end{bmatrix}, \quad (17.27)$$

s pripadnim submatricama

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_k - L_i L_j^2 - L_i L_k^2 \\ \beta_k\left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - \beta_j\left(L_k L_i^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) \\ \gamma_k\left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) + \gamma_j\left(L_k L_i^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) \end{bmatrix}, \quad (17.28)$$

gdje je $\beta_j = y_k - y_i$, $\gamma_j = x_k - x_i$ uz cikličku zamjenu indeksa i, j, k koji poprimaju vrijednosti 1, 2 i 3. Submatrici $\mathbf{N}_i$ pridružen je vektor stupnjeva slobode i-tog čvora $\mathbf{v}_i$ prema (17.24). Derivacije po Kartezijevim koordinatama jednake su

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y}, \quad (17.29)$$

gdje je

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.30)$$

A je površina trokuta koja je pomoću koordinata čvorova prikazana relacijom (10.15). Za izračunavanje matrice krutosti potrebne su druge derivacije funkcija oblika, koje se određuju pomoću sljedećih relacija zapisanih u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} & \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_1} & \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial L_2 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_1} & \frac{\partial^2}{\partial L_3 \partial L_2} & \frac{\partial^2}{\partial L_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} . \quad (17.31)$$

Iako je za prikazani element uvjet konstantne deformacije zadovoljen, u općem slučaju taj uvjet za grupu elemenata nije ispunjen. Drugim riječima, za proizvoljnu mrežu elemenata nije moguće zadovoljiti "patch" test. Taj test je zadovoljen samo u slučaju ako su elementi definirani s tri skupine paralelnih jednako razmaknutih crta. Usprkos nedostatku, rješenja postignuta tim elementom ne odstupaju znatno od točnih vrijednosti, što je razlogom da se opisana formulacija često primjenjuje.

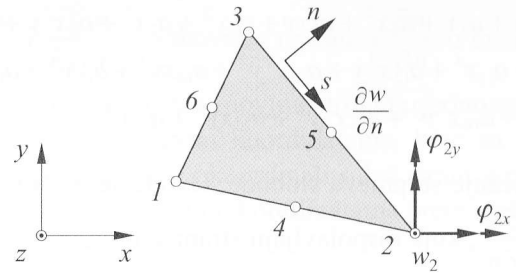
17.2.2. Trokutni konformni elementi

Kako bi se postigla konformnost prethodno opisanog elementa, potrebno je omogućiti jednoznačno određivanje parabole drugog reda koja opisuje raspodjelu nagiba duž rubova trokuta. Osim povećanjem stupnjeva slobode uvođenjem viših derivacija u čvorovima, što je analogno prikazanom konformnom pravokutnom elementu, konformnost trokutnog elementa moguće je postići uvođenjem tzv. singularnih funkcija uz nepromijenjen broj čvornih varijabli. Karakteristično je svojstvo tih funkcija da im je vrijednost duž svih stranica trokuta jednaka nuli, nagib u pravcu normale duž dviju stranica je jednak, a za treću stranicu različit je od nule i opisan je parabolom drugog reda. Uz primjenu bezdimenzijskih trokutnih koordinata singularne su funkcije

$$f_i^s = \frac{L_i L_j^2 L_k^2 (1 + L_i)}{(L_i + L_j)(L_j + L_k)}, \quad (17.32)$$

gdje se indeksi i, j, k ciklički mijenjaju s vrijednostima 1, 2 i 3. Funkcije (17.32), pomnožene s odgovarajućim koeficijentima, potrebno je dodati nekonformnoj funkciji pomaka (17.26). Pritom stupnjevi slobode u čvorovima elementa ostaju nepromijenjeni, slika 17.3., a raspodjela nagiba duž stranica trokuta ostaje parabola drugog reda. Kako bi se mogla odrediti tri dodatna koeficijen-

ta uz singularne funkcije, dodaje se po sredini svake stranice po jedan čvor s derivacijom pomaka po normali $\frac{\partial w}{\partial n}$. Na taj način element ima ukupno 12 stupnjeva slobode, slika 17.4., pri čemu dodatni stupanj slobode uz čvorne veličine u vrhovima trokuta omogućuje jednoznačno određivanje kvadratne funkcije koja opisuje raspodjelu nagiba.



Slika 17.4. Trokutni konformni element s 12 stupnjeva slobode

Različiti stupnjevi slobode u čvorovima elementa dovode do numeričkih poteškoća u formiranju globalne matrice krutosti, što je razlogom da su izvedeni elementi za koje je pretpostavljeno da je nagib na sredini stranice jednak srednjoj vrijednosti nagiba u čvorovima. Na taj način, dodatni stupnjevi slobode na sredini stranica trokuta postaju ovisne varijable, pa im je pripadne čvorove moguće eliminirati, pri čemu se element svodi na 9 stupnjeva slobode.

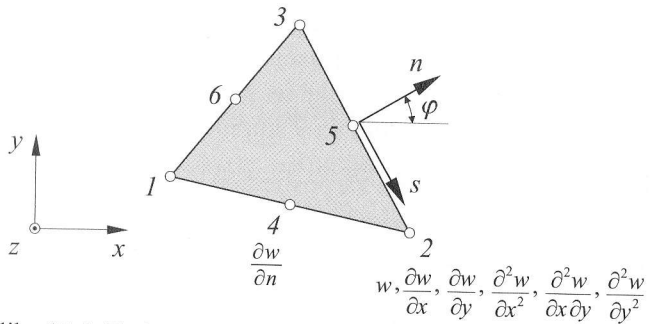
Uvođenje singularnih funkcija ima za posljedicu da u općem slučaju mješovita druga derivacija pomaka u čvorovima opisanih elemenata nije jednoznačna. Naime, njezin iznos različit je za različite pravce koji izlaze iz vrha elementa. Jedini način da se taj nedostatak otkloni, jest povećanje stupnjeva slobode elementa uvođenjem derivacija višeg reda koje omogućuju potpuno zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti.

Na temelju analogije s pravokutnim elementom, kako bi se jednoznačno mogla opisati raspodjela nagiba koji je određen derivacijom $\frac{\partial w}{\partial n}$ duž ruba trokutnog elementa, potrebno je u pripadnim čvorovima uvesti mješovitu drugu derivaciju $\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s}$, gdje je s lokalna koordinata duž stranice elementa. Za određivanje $\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s}$ za proizvoljni položaj elementa u Kartezijevu koordinatnom sustavu, potrebne su druge derivacije pomaka w po koordinatama x i y, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Pridruživanjem ovih derivacija stupnjevima slobode w, $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$, izvodi se element s po 6 stupnjeva slobode u vrhovima trokuta, što ukupno iznosi 18 stupnjeva slobode. Budući da je funkciju pomaka poželjno opisati potpunim polinomom, ovdje će se primijeniti potpuni dvodimenzijski polinom 5. stupnja koji sadrži 21 član

$$\begin{aligned} w = {} & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + \\ & + a_{10} y^3 + a_{11} x^4 + a_{12} x^3 y + a_{13} x^2 y^2 + a_{14} xy^3 + a_{15} y^4 + a_{16} x^5 + \\ & + a_{17} x^4 y + a_{18} x^3 y^2 + a_{19} x^2 y^3 + a_{20} xy^4 + a_{21} y^5, \end{aligned} \tag{17.33}$$

što zahtijeva povećanje stupnjeva slobode. Uvode se dodatna tri čvora sa stupnjevima slobode $\frac{\partial w}{\partial n}$, koja raspolavljaju stranice trokuta. Na taj način izvodi se konačni element s 21 stupnjem slobode, prema slici 17.5. Primjenom polinoma višeg stupnja ne pojavljuju se problemi geometrijske invarijantnosti pa za izvođenje funkcija oblika nije potrebno napustiti Kartezijeve koordinate.



Slika 17.5. Trokutni konformni element s 21 stupnjem slobode

Stupnjevi slobode elementa sada se mogu prikazati u obliku vektora

$$\mathbf{v}^T = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \right], \tag{17.34}$$

gdje je

$$\mathbf{v}_i^T = \left[w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i \right], \quad i = 1,2,3. \tag{17.35}$$

Promjena pomaka duž stranice elementa ovisno o koordinati s opisana je polinomom 5. stupnja koji je moguće jednoznačno odrediti sa šest podataka, tj. pomakom w i derivacijama $\frac{\partial w}{\partial s}$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$ u pripadnim čvorovima u vrhovima trokuta. Nagib $\frac{\partial w}{\partial n}$ polinom je 4. stupnja koji se jednoznačno opisuje s 5 veličina, tj. s derivacijama $\frac{\partial w}{\partial n}$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n}$ u vrhovima trokuta i $\frac{\partial w}{\partial n}$ u čvoru koji raspolavlja stranicu. Spomenute derivacije u vrhovima trokuta jednoznačno su određene pomoću derivacija po Kartezijevim koordinatama, koje su stupnjevi slobode elementa. Derivacije po normali n i koordinati s duž stranice elementa, određuju se pomoću derivacija po Kartezijevim koordinatama prema relacijama

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial n} & \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{17.36}$$

Prema slici 17.5., pravci Kartezijevih koordinata povezani su s lokalnim koordinatama n i s duž stranica trokuta pomoću izraza

$$\begin{aligned} x &= n\cos\varphi + s\sin\varphi, \\ y &= n\sin\varphi - s\cos\varphi. \end{aligned} \tag{17.37}$$

Njihovim deriviranjem, relacije (17.36) postaju

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial n} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{17.38}$$

Druge derivacije su jednake

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi - \cos^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \tag{17.39}$$

Čvorovi s derivacijama pomaka na sredini stranica elementa numerički su nepovoljni. Osim toga što čvorovi s različitim stupnjevima slobode stvaraju poteškoće u formiranju globalne matrice krutosti, tu je za svaki čvor na sredini stranice potrebno odrediti pravac normale, što proračun čini znatno složenijim. Stoga je poželjno spomenute čvorove eliminirati, a da se pritom ne naruše uvjeti kompatibilnosti.

Opisani element s 21 stupnjem slobode moguće je transformirati u konformni element s 18 stupnjeva slobode, koji sadrži samo čvorove u vrhovima trokuta. Pritom se pretpostavlja promjena nagiba $\frac{\partial w}{\partial n}$ duž rubova elementa po paraboli 3. reda

$$\frac{\partial w}{\partial n} = a'_1 + a'_2 s + a'_3 s^2 + a'_4 s^3 , \tag{17.40}$$

koja se može jednoznačno opisati pomoću veličina u pripadnim čvorovima, $\frac{\partial w}{\partial n}$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n}$. Koeficijenti a'_1 do a'_4 određuju se pomoću stupnjeva slobode u vrhovima trokuta, pa je na taj način nagibe u čvorovima *4*, *5* i *6* elementa prema slici 17.5. moguće prikazati pomoću stupnjeva slobode u čvorovima *1*, *2* i *3*

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_6 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}, \tag{17.41}$$

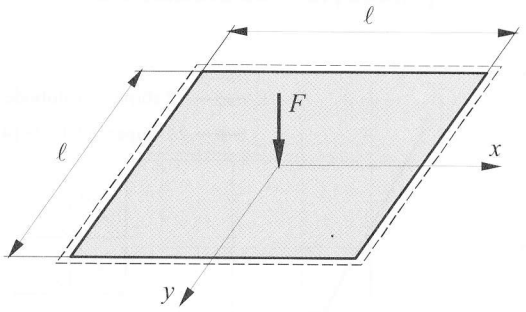
gdje je **H** matrica transformacije koja ovisi o geometriji elementa. Pomoću relacije (17.41) uz primjenu odgovarajućih matematičkih transformacija, element s 21 stupnjem slobode svodi se na konformni element s tri čvora i 18 stupnjeva slobode. U [52] je pokazano da je matricu krutosti elementa s 18 stupnjeva slobode moguće izračunati transformacijom matrice krutosti koja se odnosi na element s 21 stupnjem slobode na sljedeći način:

$$\underset{18\times18}{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}^T \underset{21\times21}{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \tag{17.42}$$

gdje je **I** jedinična matrica. Konformni element s 18 stupnjeva slobode u literaturi se naziva element s kondenziranim polinomom 5. stupnja. Eliminiranjem čvorova na stranicama elementa širina pojasa globalne matrice krutosti se smanjuje, a također je i manji broj stupnjeva slobode proračunskog modela, što pridonosi numeričkoj učinkovitosti. Korisno je i ovdje upozoriti da su stupnjevi slobode opisani derivacijama višeg reda neprikladni kad se pojavljuje diskontinuitet debljine ploče, što je već spomenuto kod pravokutnoga konformnog elementa.

17.3. Analiza konvergencije rješenja

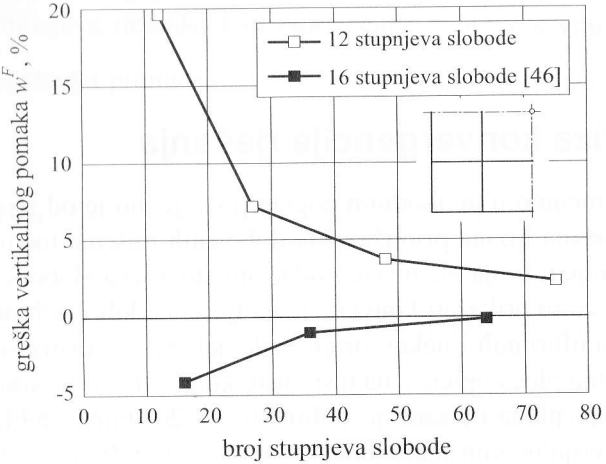
Kao što je spomenuto u prethodnim poglavljima, jedno je od mjerila valjanosti konačnih elemenata brzina približavanja dobivenih rješenja točnim vrijednostima s povećavanjem broja elemenata, odnosno stupnjeva slobode proračunskog modela. Ovdje će se prikazati konvergencija rješenja dobivenih pomoću prethodno opisanih konformnih i nekonformnih elemenata. Razmatra se slobodno oslonjena kvadratna ploča opterećena u središtu koncentriranom silom, prema slici 17.6. Geometrija ploče opisana je duljinom $\ell = 200\,\text{mm}$ i debljinom stijenke $h = 5\,\text{mm}$. Materijalne konstante jednake su $E = 210\,\text{GPa}$ i $\nu = 0.29$, a opterećenje je $F = 10\,\text{kN}$.



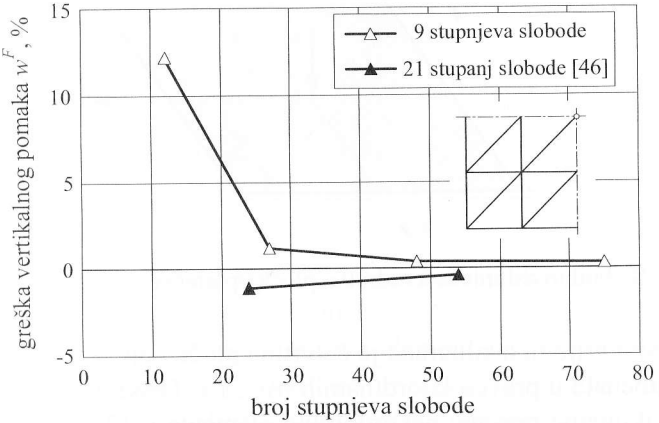
Slika 17.6. Slobodno oslonjena kvadratna ploča opterećena koncentriranom silom

Koristeći se simetrijom, analizirana je četvrtina ploče koja je podijeljena na jednaki broj elemenata u pravcu koordinatnih osi x i y. Diskretizacija pravokutnim elementima uključuje opisane nekonformne elemente s 12 stupnjeva slobode i konformne elemente sa 16 stupnjeva slobode. Primijenjeni trokutni elementi su nekonformni elementi s 9 stupnjeva slobode prema [18], te konformni elementi s 21 stupnjem slobode za koje je funkcija pomaka opisana polinomom 5. stupnja. Promatrane su vrijednosti vertikalnog pomaka na mjestu djelovanja koncentrirane sile. Vrijednosti izračunate pomoću metode konačnih elemenata uspore-

lene su s točnim rješenjem, $w = 1{,}94$ mm, prema teoriji tankostjenih ploča 111]. Analizirana je promjena greške vertikalnog pomaka s povećanjem broja lemenata. Proračun pravokutnim elementima s 12 stupnjeva slobode i trokutnim elementima s 9 stupnjeva slobode proveden je pomoću programskog paketa EMAS [19], a rješenja dobivena pravokutnim elementima sa 16 stupnjeva slobode te trokutnim elementima s 21 stupnjem slobode preuzeta su iz [46].



Slika 17.7. Konvergencija vertikalnih pomaka dobivenih pomoću pravokutnih elemenata



Slika 17.8. Konvergencija vertikalnih pomaka dobivenih pomoću trokutnih elemenata

Dijagrami iz kojih se vidi približavanje točnim rješenjima s povećanjem broja stupnjeva slobode proračunskog modela, prikazani su na slikama 17.7. i 17.8.

Broj stupnjeva slobode koji je označen na apcisi uključuje pomake koji su ograničeni rubnim uvjetima. Lako je uočiti da su vrijednosti pomaka izračunate pomoću nekonformnih elemenata veće od točnog rješenja. Nasuprot tome, rješenja dobivena primjenom konformnih elemenata pokazuju nešto veću krutost proračunskog modela od realne konstrukcije. Drugim riječima, pomaci se odozdo monotono približavaju točnim vrijednostima, što je u skladu s ispravnom formulacijom. Kao što se moglo očekivati, konvergencija rješenja dobivenih konformnim elementima znatno je bolja nego za nekonformne elemente.

18. KONAČNI ELEMENTI ZA ANALIZU LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA

Za razliku od ploča kojima je srednja ploha ravnina, ljuskasti kontinuum omeđen je dvjema zakrivljenim plohama pri čemu je srednja ploha također zakrivljena. Osim momenata savijanja i uvijanja te poprečnih sila, koje su unutarnje veličine u pločastom kontinuumu, u ljuskastim konstrukcijama vanjsko opterećenje preuzimaju i membranske sile koje djeluju u tangencijalnoj ravnini srednje plohe. Pretpostavke o deformiranju analogne su pretpostavkama u teoriji savijanja tankih ploča. Osnovne relacije, koje se odnose na Kirchhoff-Loveovu teoriju tankostjenih ljusaka, prikazane su u odjeljku 3.7. Nije teško zaključiti da je analitičko rješavanje problema teorije ljusaka, što uključuje određivanje stanja naprezanja i deformacije u proizvoljno opterećenom ljuskastom kontinuumu, matematički jako složen problem. U literaturi su izvedene približne relacije koje se odnose samo na specijalne, najčešće osnosimetrične ljuskaste oblike za posebne slučajeve opterećenja. Pritom se uvode različite pretpostavke koje se odnose na geometriju, način deformiranja i opterećenje.

Primjena konačnih elemenata omogućuje s dovoljnom točnošću numeričku analizu naprezanja i deformacije proizvoljnih ljuskastih oblika za proizvoljno opterećenje. Njihova formulacija znatno je složenija nego pločastih konačnih elemenata, što je razlog da se zakrivljeni ljuskasti kontinuum vrlo često aproksimira s mnogo jednostavnijim ravnim elementima. Budući da su unutarnje veličine membranske sile i momenti savijanja i uvijanja, formulacija ravnih elemenata temelji se na superpoziciji dvodimenzijskih elemenata opisanih u 13. poglavlju i elemenata za analizu savijanja ploča. Najčešće se primjenjuju ravni trokutni i pravokutni elementi. Osim približnog opisivanja zakrivljene geometrije, nedostatak je ravnih elemenata potpuna međusobna neovisnost membranske energije deformiranja i energije zbog savijanja. Naime, membranske sile posljedica su samo tangencijalnih komponenata pomaka, a momenti savijanja i uvijanja povezani su samo s komponentom u pravcu normale na srednju plohu. U odjeljku 3.7. pokazano je da za realne, zakrivljene ljuskaste geometrije sve komponente

pomaka utječu i na membranske deformacije i na promjenu zakrivljenosti srednje plohe.

Za analizu osnosimetričnih ljusaka primjenjuju se osnosimetrični ravni i dvostruko zakrivljeni konačni elementi. Razlikuju se elementi za rješavanje problema osnosimetrične deformacije te elementi za rješavanje problema proizvoljno opterećenih osnosimetričnih ljuskastih konstrukcija. Ako opterećenje nije osnosimetrično, primjenjuje se formulacija temeljena na razvoju opterećenja i pomaka u Fourierove redove, na način koji je analogan postupku opisanom u odjeljku 15.3.

Najsloženiji ljuskasti elementi su zakrivljeni elementi pomoću kojih je moguće opisati proizvoljnu geometriju uz proizvoljno opterećenje, a formulacija im se temelji na klasičnoj teoriji ljusaka. Osim složenosti formulacije, njihov je nedostatak osjetljivost na pomake krutog tijela. Drugim riječima, pri pomaku krutog tijela u elementima se mogu pojaviti deformacije. Kako bi se ta osjetljivost smanjila, potreban je visoki stupanj polinoma funkcije pomaka, što u znatnoj mjeri povećava broj stupnjeva slobode. Jednostavnija je formulacija zakrivljenih ljuskastih elemenata koji se izvode degeneriranjem izoparametarskih trodimenzijskih elemenata. Na taj su način izbjegnute složene relacije teorije ljusaka, a potrebni C^1-kontinuitet funkcije pomaka zamijenjen je s C^0-kontinuitetom. Takvi elementi temeljeni su na Reissner-Mindlinovim pretpostavkama [119], a mogu se primijeniti jednako za tankostjene kao i za debelostjene ljuskaste konstrukcije.

Ovdje će se dati prikaz ravnih elemenata, osnosimetričnih elemenata te zakrivljenih elemenata izvedenih primjenom teorije ljusaka i degeneriranjem trodimenzijskih elemenata.

18.1. Ravni elementi za analizu ljuskastih konstrukcija

Najjednostavniji elementi za analizu ljuskastih konstrukcija ravni su elementi. Zakrivljeni ljuskasti kontinuum dijeli se na više ravnih elemenata pri čemu zakrivljene koordinate prelaze u izlomljene ravne poligonalne crte koje prolaze srednjom plohom spomenutih elemenata. Gaussova zakrivljenost ravnih elemenata jednaka je nuli, a za Laméove parametre vrijedi $A_1 = A_2 = 1$. Nakon uvrštavanja $R_1 = R_2 = \infty$, te uz zamjenu krivocrtnih koordinata α_1 i α_2 s ravnim lokalnim koordinatama x i y, kinematička relacija (3.151) u odjeljku 3.7. postaje

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{xx} \\ 0 & 0 & -\partial_{yy} \\ 0 & 0 & -2\partial_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{18.1}$$

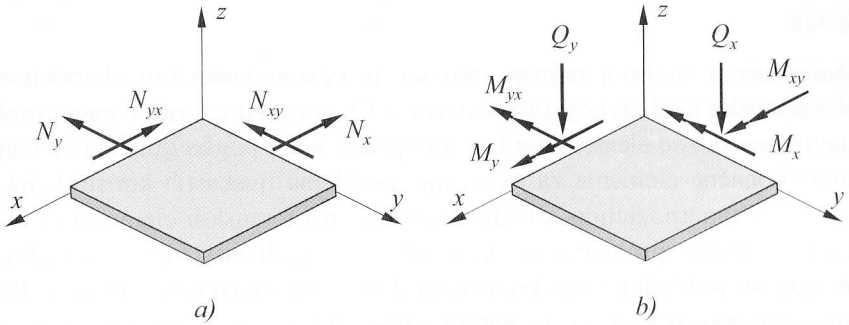
Unutarnje veličine koje se odnose na jedinicu duljine srednje plohe prema (3.132) do (3.136) jednake su

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \mathrm{d}z\,, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \mathrm{d}z\,, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \mathrm{d}z\,, \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yx} \mathrm{d}z\,, \tag{18.2}$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z\,, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \mathrm{d}z\,, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z \mathrm{d}z\,, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yx} z \mathrm{d}z\,, \tag{18.3}$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} \mathrm{d}z\,, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} \mathrm{d}z\,. \tag{18.4}$$

Budući da je $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$, u gornjim je relacijama $N_{yx} = N_{xy}$ i $M_{yx} = M_{xy}$. Sve navedene unutarnje veličine prikazane su na ravnom elementu na slici 18.1.



Slika 18.1. Unutarnje veličine na ravnom elementu ljuske:
a) unutarnje membranske sile, b) unutarnji momenti i poprečne sile

Konstitutivne relacije u simboličkom matričnom zapisu jednake su izrazu (3.160) koji je korisno još jednom napisati

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f \end{bmatrix} \tag{18.5}$$

Submatrice $\mathbf{D}_m$ i $\mathbf{D}_f$ matrice su elastičnih konstanti prikazane u (3.155) i (3.157). Komponente vektora $\boldsymbol{\sigma}_m$ i $\boldsymbol{\sigma}_f$ unutarnje su sile i momenti

$$\boldsymbol{\sigma}_m^T = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}, \tag{18.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^T = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}. \tag{18.7}$$

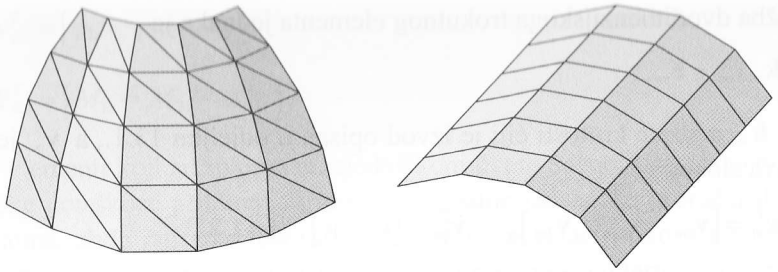
Komponente vektora $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ jednake su

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \tag{18.8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f^T = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{18.9}$$

Nije teško zaključiti da $\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{D}_m\boldsymbol{\varepsilon}_m$ u relaciji (18.5) opisuje problem ploče opterećene u srednjoj ravnini koji je prikazan u odjeljku 3.5., a izraz $\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f\boldsymbol{\varepsilon}_f$ predstavlja savijanje ploče razmatrane u odjeljku 3.6. Iz (18.1) vidi se da membranske komponente deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ ovise samo o membranskim pomacima u i v, a komponente koje opisuju zakrivljenost srednje plohe $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ funkcije su samo normalnog pomaka w. Membranske sile u $\boldsymbol{\sigma}_m$ posljedica su samo tangencijalnih pomaka, a momenti u $\boldsymbol{\sigma}_f$ povezani su samo s pomakom u pravcu normale. Iz toga slijedi da je problem deformiranja u ravnim elementima moguće razmatrati kao superpoziciju membranskog djelovanja i deformiranja koje je posljedica savijanja.

Deformiranje u srednjoj ravnini moguće je opisati konačnim elementima za dvodimenzijsku analizu koji su prikazani u 13. poglavlju, a rješavanje problema savijanja provodi se elementima koji su opisani u 17. poglavlju. To pokazuje da je ravne konačne elemente za rješavanje problema ljuskastih konstrukcija moguće izvesti superpozicijom dvodimenzijskih membranskih elemenata i elemenata za rješavanje problema savijanja ploča. Najjednostavniji su trokutni elementi koji su prikladni za diskretizaciju dvostruko zakrivljenih ljusaka. Pravokutnim elementima moguće je opisati samo cilindrične oblike i različite prostorne pločaste konstrukcije. Primjer diskretizacije s trokutnim i pravokutnim elementima prikazan je na slici 18.2.

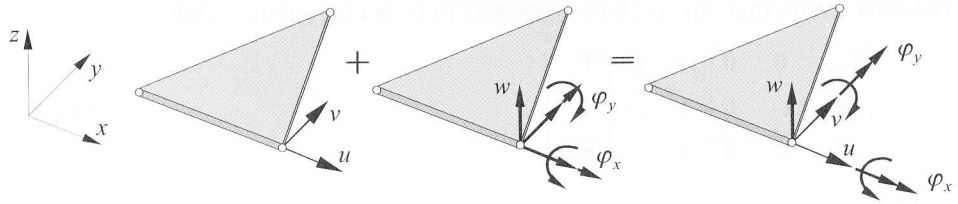


a) *b)*

Slika 18.2. Diskretizacija ljuskastih konstrukcija s ravnim elementima: a) sferna ljuska opisana trokutnim elementima, b) cilindrična ploha s pravokutnim elementima

Gore opisana međusobna neovisnost membranskog djelovanja i deformiranja poradi savijanja jedan je od nedostataka ravnih elemenata. Naime, na membranske deformacije realne zakrivljene srednje plohe osim tangencijalnih pomaka u i v, utječe i normalna komponenta pomaka w. Jednako tako njezina zakrivljenost posljedica je svih triju komponenata pomaka. To je lako zaključiti iz relacije (3.150) u odjeljku 3.7. Nemogućnost međusobnog povezivanja membranskih deformacija i deformacija zbog savijanja, jest greška pri opisivanju zakrivljenoga ljuskastoga kontinuuma ravnim elementima. Međusobna povezanost savijanja i membranskog djelovanja postiže se samo na globalnoj razini između susjednih elemenata ako ne leže u istoj ravnini. Pritom se membranske sile jednog elementa prenose na drugi susjedni element tako da njihove komponente koje nisu komplanarne sa susjednim elementom, izazivaju njegovo savijanje. Jednako tako momenti i poprečne sile uvjetuju membranske deformacije u susjednim nekomplanarnim elementima. To pokazuje da se spomenuta greška smanjuje s povećanjem broja elemenata, pri čemu se diskretizirani proračunski model približava stvarnoj geometriji zakrivljene ljuskaste konstrukcije.

Matrica krutosti ravnog elementa izvodi se superpozicijom dvodimenzijskoga membranskog elementa za ravninsko stanje naprezanja i elementa za rješavanje problema savijanja ploča, što je na primjeru trokutnog elementa prikazano na slici 18.3.



Slika 18.3. Izvod ravnoga trokutnog elementa za rješavanje problema ljuskastih konstrukcija

Jednadžba dvodimenzijskoga trokutnog elementa jednaka je

$$\mathbf{k}_m \mathbf{v}_m = \mathbf{F}_m , \tag{18.10}$$

gdje je $\mathbf{k}_m$ matrica krutosti čiji je izvod opisan u odjeljku 13.1., a $\mathbf{v}_m$ je vektor stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}_m^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1m} & \mathbf{v}_{2m} & \mathbf{v}_{3m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{im}^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 . \tag{18.11}$$

Vektor sila u čvorovima $\mathbf{F}_m$ jednak je

$$\mathbf{F}_m^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1m} & \mathbf{F}_{2m} & \mathbf{F}_{3m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{im}^T = \begin{bmatrix} F_{ix} & F_{iy} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 . \tag{18.12}$$

Za pločasti element vrijedi relacija

$$\mathbf{k}_p \mathbf{v}_p = \mathbf{F}_p . \tag{18.13}$$

Izvod matrice krutosti $\mathbf{k}_p$ opisan je u 17. poglavlju. Vektori stupnjeva slobode $\mathbf{v}_p$ i sila u čvorovima $\mathbf{F}_p$ prikazani su relacijama

$$\mathbf{v}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1p} & \mathbf{v}_{2p} & \mathbf{v}_{3p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{ip}^T = \begin{bmatrix} w_i & \varphi_{ix} & \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 , \tag{18.14}$$

$$\mathbf{F}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1p} & \mathbf{F}_{2p} & \mathbf{F}_{3p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ip}^T = \begin{bmatrix} F_{iz} & M_{ix} & M_{iy} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3 . \tag{18.15}$$

Prema slici 18.3., jednadžba je ravnog elementa za analizu ljusaka

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} . \tag{18.16}$$

Ovdje je pokazano da rezultirajući trokutni element ima 5 stupnjeva slobode u svakom čvoru, što čini poteškoće prilikom transformacije koordinata pri izvođenju globalne jednadžbe konačnih elemenata. Kako bi se pomaci i kutovi zakreta mogli transformirati na isti način, stupnjevima slobode u čvorovima dodaje se kut zakreta oko osi z, φ_{iz}, kojemu se pridružuje fiktivni moment M_{iz}. Budući da stupnjevi slobode φ_{iz} nisu uključeni u formulaciju elementa, tj. ne pridonose energiji deformiranja, potrebno je matricu krutosti proširiti s odgovarajućim redcima i stupcima čiji su članovi jednaki nuli. Na taj način se dobiva

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \mathbf{v}_p \\ \mathbf{v}_{\varphi z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_{Mz} \end{bmatrix} , \tag{18.17}$$

gdje je

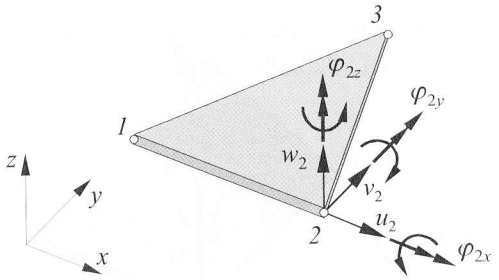
$$\mathbf{v}_{\varphi z}^T = \left[\varphi_{1z} \quad \varphi_{2z} \quad \varphi_{3z}\right], \tag{18.18}$$

$$\mathbf{F}_{Mz}^T = \left[M_{1z} \quad M_{2z} \quad M_{3z}\right]. \tag{18.19}$$

Ako su elementi koji se spajaju u zajedničkom čvoru komplanarni, pojavljuju se numeričke poteškoće prilikom formiranja globalne jednadžbe proračunskog modela. Naime, zbog nulte krutosti koja je pridružena rotaciji oko osi z lokalnoga koordinatnog sustava, globalna matrica krutosti postaje singularna. Taj nedostatak uklanja se najčešće na dva načina. U zajedničkim čvorovima komplanarnih elemenata potrebno je spriječiti rotacije oko lokalnih osi z. Drugi način, koji se primjenjuje češće, pridruživanje je fiktivne krutosti rotacijama oko normale na srednju ravninu. Stupnjevima slobode φ_{iz} pridružuju se fiktivni članovi matrice krutosti čiji je iznos dovoljan da se ukloni singularnost globalne matrice krutosti, a da se pritom ne naruši točnost rješenja. I jedan i drugi način čine proračun dodatno složenijim jer je za svaki element na temelju geometrijske analize potrebno utvrditi leži li u istoj ravnini sa susjednim elementima. Jednostavniji je način uvođenje fiktivne krutosti za sve elemente bez obzira na to jesu li komplanarni ili ne, što je dodatna aproksimacija kod nekomplanarnih elemenata. Mnogo je bolji način uvođenje stupnja slobode φ_{iz} u formulaciju konačnog elementa, što je još uvijek jedan od zadataka istraživanja u području ljuskastih konačnih elemenata [119]. Stupnjeve slobode u (18.17) prikladno je poredati tako da su svakom čvoru najprije pridruženi pomaci, a zatim rotacije, tj.

$$\mathbf{v}^T = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\right], \quad \mathbf{v}_i^T = \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \varphi_{iz}\right], \quad i = 1,2,3, \tag{18.20}$$

što zahtijeva razmještaj redaka i stupaca u matrici krutosti. Nakon toga provodi se transformacija u odnosu na globalni koordinatni sustav i formulacija globalne jednadžbe konačnih elemenata na način koji je opisan u odjeljku 8.2.

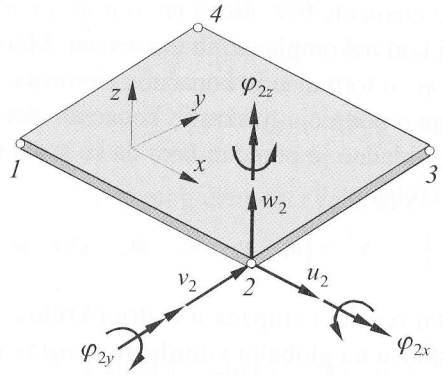


Slika 18.4. Ravni trokutni element s 18 stupnjeva slobode

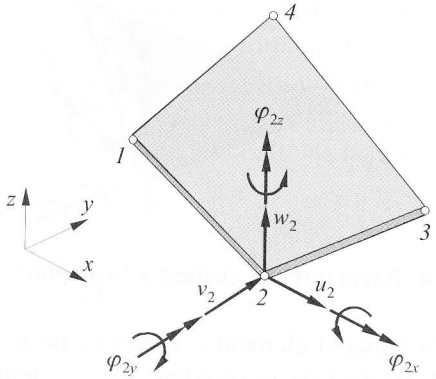
Gore izvedeni trokutni konačni element s 3 čvora s po 6 stupnjeva slobode prikazan je na slici 18.4. Budući da je izveden superpozicijom osnovnoga dvodimenzijskog elementa sa 6 stupnjeva slobode i nekonformnoga pločastog ele-

menta s 9 stupnjeva slobode, funkcije koje opisuju tangencijalne komponente pomaka linearne su, a normalna komponenta pomaka mijenja se po paraboli trećeg reda. Iz toga slijedi da su unutarnje membranske sile po površini elementa konstantne, a promjena unutarnjih momenata je linearna.

Na isti način, superpozicijom matrica krutosti osnovnoga pravokutnog dvodimenzijskog elementa s 8 stupnjeva slobode i nekonformnoga pravokutnog pločastog elementa s 12 stupnjeva slobode, uz dodavanje rotacije oko normale na srednju ravninu, izvodi se pravokutni element s 24 stupnja slobode, slika 18.5. Analogno je moguće izvesti i proizvoljni četverokutni element s istim brojem stupnjeva slobode, prema slici 18.6., pri čemu je potrebno provesti superpoziciju izoparametarskoga četverokutnog elementa i proizvoljnoga četverokutnog elementa za analizu ploča. Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, proizvoljni pločasti četverokutni element najčešće se izvodi spajanjem trokutnih elemenata uz eliminiranje unutarnjih stupnjeva slobode primjenom statičke kondenzacije [119].



Slika 18.5. Ravni pravokutni element s 24 stupnja slobode



Slika 18.6. Ravni četverokutni element s 24 stupnja slobode

Osim nekonformnih elemenata, na analogan način moguće je izvesti i konformne ravne elemente. Nije teško zaključiti da je konformnost moguće postići samo za komplanarne elemente. Jasno je da u općem slučaju kad elementi ne leže u istoj ravnini, što je slučaj pri modeliranju zakrivljenih ploha, konformnost nije moguće ostvariti.

18.2. Elementi za analizu osnosimetričnih ljusaka

Rješavanje problema ljuskastih konstrukcija mnogo je jednostavnije kad su ljuske osnosimetrične, slika 3.20. Ako je osim geometrije i opterećenje osnosimetrično, u ljusci vlada stanje osnosimetrične deformacije koje je moguće opisati s dvije komponente pomaka. Za osnosimetričnu ljusku prema slici 3.20. krivocrtne koordinate α_1 i α_2 uvedene u odjeljku 3.7., zamijenjene su koordinatama θ i φ, a Laméovi parametri A_1 i A_2 opisani su relacijom (3.171). Uz spomenute supstitucije za krivocrtne koordinate i Laméove parametre, te izjednačivanjem cirkularne komponente pomaka s nulom, $v = 0$, kinematičke relacije (3.151) za stanje osnosimetrične deformacije prelaze u oblik

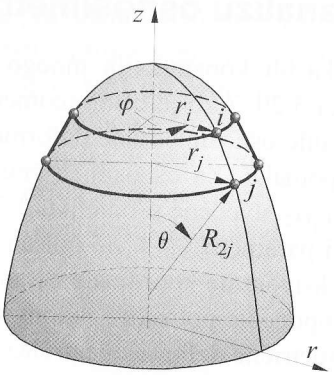
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}: \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & \dfrac{1}{R_1} \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & \dfrac{\sin\theta}{r} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \\ \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}, \tag{18.21}$$

gdje je $\mathrm{d}s$ elementarna lučna duljina meridijana $\mathrm{d}s = R_1\,\mathrm{d}\theta$, a r je radijalna koordinata $r = R_2 \sin\theta$. Konstitutivne su jednadžbe jednake

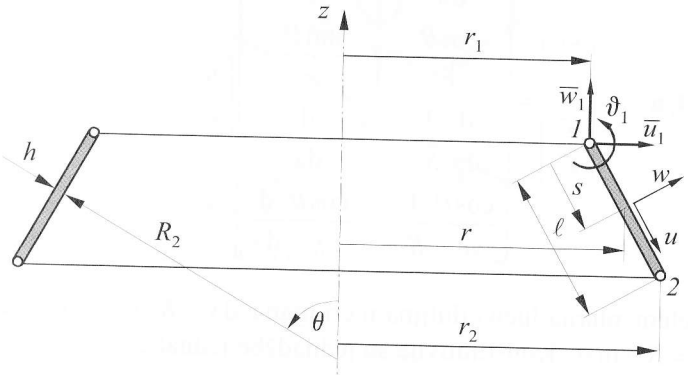
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}: \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{h^2}{12} & \nu\dfrac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & \nu\dfrac{h^2}{12} & \dfrac{h^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}. \tag{18.22}$$

Unutarnje veličine N_1, N_2, M_1 i M_2 prikazane su na elementu osnosimetrične ljuske na slici 3.21. Najjednostavniji elementi za opisivanje stanja osnosimetri-

čne deformacije u osnosimetričnim ljuskama prstenasti su elementi s ravnom izvodnicom. Na slici 18.7. na osnosimetričnoj ljusci prikazan je prstenasti element s čvornim kružnicama i i j. Pritom se zakrivljeni meridijan osnosimetrične srednje plohe s promjenjivim kutom θ aproksimira s više ravnih crta za koje je kut θ konstantan. Takvi konačni elementi nazivaju se prstenasti ravni ljuskasti elementi ili konusni elementi, prema slici 18.8. gdje su čvorne kružnice označene brojevima *1* i *2*.



Slika 18.7. Ravni prstenasti element na srednjoj plohi osnosimetrične ljuske



Slika 18.8. Ravni prstenasti ljuskasti element sa stupnjevima slobode

Duž ravne izvodnice konusnog elementa meridijalni je kut θ konstantan, a polumjer zakrivljenosti je $R_1 = \infty$, pa nakon uvrštavanja u (18.21) kinematička relacija $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$ postaje

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & 0 \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & \dfrac{\sin\theta}{r} \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \\ 0 & -\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}. \tag{18.23}$$

Komponenta pomaka u u pravcu je lokalne koordinate s, a normalna komponenta w je u pravcu normale na srednju plohu, $\mathbf{u}^T = [u \quad w]$, slika 18.8. Stupnjevi su slobode radijalni i osni pomaci $\overline{u}$ i $\overline{w}$ u pravcu globalnih koordinatnih osi r i z, te kut zakreta ϑ, prema slici 18.8. Na taj je način vektor stupnjeva slobode ravnoga prstenastog elementa s dvije čvorne kružnice *1* i *2* jednak

$$\mathbf{v}^T = [\overline{u}_1 \quad \overline{w}_1 \quad \vartheta_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{w}_2 \quad \vartheta_2] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]. \tag{18.24}$$

Pripadne su sile jednake

$$\mathbf{F}^T = [F_{1x} \quad F_{1z} \quad M_1 \quad F_{2x} \quad F_{2z} \quad M_2] = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2] \tag{18.25}$$

U čvorovima elementa komponente pomaka u i w povezane su sa stupnjevima slobode (18.24) na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \vartheta_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \tag{18.26}$$

Duž izvodnice elementa pretpostavlja se linearna promjena komponente pomaka u, a normalna komponenta w mijenja se po paraboli trećeg reda

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 s, \\ w &= a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3, \end{aligned} \tag{18.27}$$

što je analogno jednodimenzijskim elementima opisanim u 12. poglavlju. Konstante a_1 do a_6 određuju se pomoću rubnih uvjeta

$$
\begin{aligned}
&s=0, \quad u=u_1, \quad w=w_1, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_1,\\
&s=\ell, \quad u=u_2, \quad w=w_2, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_2,
\end{aligned}
\tag{18.28}
$$

nakon čega se na poznati način izvode funkcije oblika koje povezuju pomake duž izvodnice s pomacima u čvorovima

$$
\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^w & N_1^\vartheta & 0 & N_2^w & N_2^\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_2 \end{bmatrix}. \tag{18.29}
$$

Funkcije su oblika za komponentu pomaka u jednake

$$
\begin{aligned}
N_1^u &= 1-\xi,\\
N_2^u &= \xi,
\end{aligned}
\tag{18.30}
$$

a za normalnu komponentu w vrijede relacije

$$
\begin{aligned}
N_1^w &= 1-3\xi^2+2\xi^3,\\
N_1^\vartheta &= \ell\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right),\\
N_2^w &= 3\xi^2-2\xi^3,\\
N_2^\vartheta &= \ell\left(-\xi^2+\xi^3\right).
\end{aligned}
\tag{18.31}
$$

Zbog jednostavnosti, uvedena je bezdimenzijska koordinata $\xi=\dfrac{s}{\ell}$, $(0\le\xi\le 1)$, gdje je ℓ duljina izvodnice elementa. Nije teško zaključiti da su relacije (18.30) analogne funkcijama oblika za osnovni štapni element, a izrazi (18.31) pokazuju analogiju s osnovnim grednim elementima. Relacije (18.31) jednake su Hermiteovim polinomima (11.15) i (11.16).

Pomoću (18.26) i (18.29), raspodjelu pomaka duž izvodnice moguće je povezati sa stupnjevima slobode (18.24) u pravcu globalnih koordinatnih osi

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N'}_1 & \mathbf{N'}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N'}\,\mathbf{T}\,\mathbf{v}\,, \tag{18.32}$$

gdje su $\mathbf{N'}_1$ i $\mathbf{N'}_2$ sljedeće matrice funkcija oblika za čvorove *1* i *2*:

$$\mathbf{N'}_1 = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^w & N_1^\vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N'}_2 = \begin{bmatrix} N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_2^w & N_2^\vartheta \end{bmatrix}, \tag{18.33}$$

a $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$ matrice su transformacije

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18.34}$$

Prema (18.32), matrica funkcija oblika za stupnjeve slobode u pravcu globalnih koordinatnih osi jednaka je

$$\mathbf{N} = \mathbf{N'}\,\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{N'}_1\,\mathbf{T}_1 & \mathbf{N'}_2\,\mathbf{T}_2 \end{bmatrix}. \tag{18.35}$$

Matrica **B** izračunava se deriviranjem funkcija oblika, pomoću kinematičkoga diferencijalnog operatora iz relacije (18.23), na sljedeći način:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N} = \mathbf{D}_k\mathbf{N'}\,\mathbf{T} = \mathbf{B'}\,\mathbf{T}, \tag{18.36}$$

gdje je

$$\mathbf{B'} = \mathbf{D}_k\mathbf{N'} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_k\mathbf{N'}_1 & \mathbf{D}_k\mathbf{N'}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B'}_1 & \mathbf{B'}_2 \end{bmatrix}. \tag{18.37}$$

Lako je zaključiti da je čvoru *1* pridružena matrica $\mathbf{B'}_1 = \mathbf{D}_k\mathbf{N'}_1$, a za čvor *2* vrijedi $\mathbf{B'}_2 = \mathbf{D}_k\mathbf{N'}_2$. Na taj je način primjenom $\mathbf{D}_k$ iz (18.23) te na temelju (18.33), matrica $\mathbf{B'}_1$ jednaka

$$\mathbf{B'}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}N_1^u}{\mathrm{d}s} & 0 & 0 \\ \dfrac{N_1^u\cos\theta}{r} & \dfrac{N_1^w\sin\theta}{r} & \dfrac{N_1^\vartheta\sin\theta}{r} \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}^2N_1^w}{\mathrm{d}s^2} & -\dfrac{\mathrm{d}^2N_1^\vartheta}{\mathrm{d}s^2} \\ 0 & -\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\mathrm{d}N_1^w}{\mathrm{d}s} & -\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\mathrm{d}N_1^\vartheta}{\mathrm{d}s} \end{bmatrix}. \tag{18.38}$$

Derivacije po izvodnici s izračunavaju se pomoću relacija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\ell}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{\ell^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{18.39}$$

Analogno se dobiva i matrica $\mathbf{B}'_2$.

Matrica krutosti izračunava se pomoću poznate relacije

$$\mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}A, \tag{18.40}$$

gdje je elementarna površina konusnog elementa $\mathrm{d}A = 2r\pi \, \mathrm{d}s = 2r\pi\ell \, \mathrm{d}\xi$, pa se integral transformira u oblik

$$\mathbf{k} = 2\ell\pi \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r \, \mathrm{d}\xi. \tag{18.41}$$

Uvrštavanjem $\mathbf{B} = \mathbf{B}' \mathbf{T}$, što slijedi iz (18.36), izraz (18.41) postaje

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \left(2\ell\pi \int_0^1 \mathbf{B}'^T \mathbf{D} \mathbf{B}' r \, \mathrm{d}\xi \right) \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}, \tag{18.42}$$

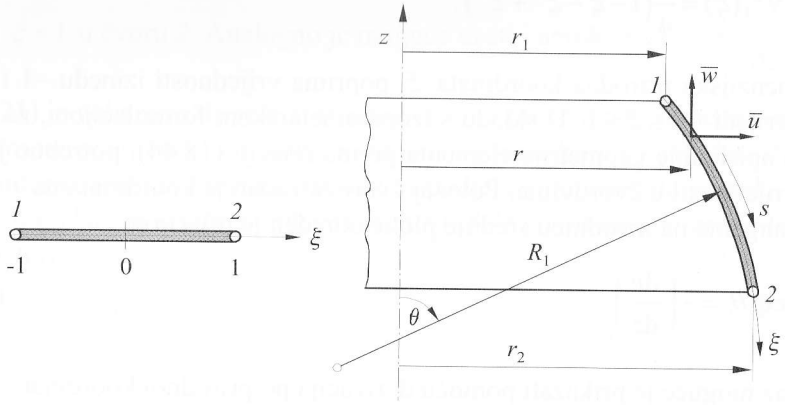
gdje je $\mathbf{k}'$ matrica krutosti u odnosu na stupnjeve slobode u pravcu lokalnih koordinata

$$\mathbf{k}' = 2\ell\pi \int_0^1 \mathbf{B}'^T \mathbf{D} \mathbf{B}' r \, \mathrm{d}\xi. \tag{18.43}$$

Lako je provjeriti da je relacija (18.42), koja povezuje matrice krutosti u odnosu na globalni i lokalni koordinatni sustav, analogna izrazu (8.47). Kako bi se moglo provesti integriranje, potrebno je polumjer r u (18.43) prikazati kao funkciju bezdimenzijske koordinate ξ. Integriranje se najčešće provodi numerički. Za rješavanje opisanog problema osnosimetričnih ljusaka, osim određivanja matrice krutosti, potrebno je izračunati vektore opterećenja. Čvorne sile izračunavaju se na način koji je analogan postupku opisanom za osnosimetrične elemente koji su razmatrani u 15. poglavlju.

Točnije opisivanje deformiranja osnosimetričnih ljusaka je pomoću dvostruko zakrivljenih osnosimetričnih elemenata. Na taj je način geometrija mnogo bolje opisana. Izvodnica diskretiziranog modela kontinuirana je krivulja, što znači da je kontinuiran prijelaz između susjednih elemenata. Za izvođenje jednadžbe dvostruko zakrivljenoga konačnog elementa najprikladnija je izoparametarska formulacija koja je razmatrana u 16. poglavlju. U skladu sa spomenutom formu-

lacijom, zakrivljena izvodnica realnog elementa u globalnom koordinatnom sustavu r, z dobiva se preslikavanjem ravnoga jednodimenzijskog elementa opisanog prirodnom koordinatom ξ, prema slici 18.9.



Slika 18.9. Dvostruko zakrivljeni osnosimetrični ljuskasti element

Koordinate koje opisuju izvodnicu srednje plohe i komponente pomaka u pravcu tih koordinata opisane su pomoću istih interpolacijskih funkcija sljedećim relacijama [119]:

$$r=\sum_{i=1}^{2}\left[N'_i(\xi)r_i+N''_i(\xi)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)_i\right],$$
$$z=\sum_{i=1}^{2}\left[N'_i(\xi)z_i+N''_i(\xi)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)_i\right], \tag{18.44}$$

$$\bar{u}=\sum_{i=1}^{2}\left[N'_i(\xi)\bar{u}_i+N''_i(\xi)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\xi}\right)_i\right],$$
$$\bar{w}=\sum_{i=1}^{2}\left[N'_i(\xi)\bar{w}_i+N''_i(\xi)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\xi}\right)_i\right], \tag{18.45}$$

gdje su interpolacijske funkcije $N'_i(\xi)$ i $N''_i(\xi)$ jednake Hermiteovim polinomima

$$N'_1(\xi)=\frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right),$$

$$N'_2(\xi)=\frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right),$$

$$N''_1(\xi)=\frac{1}{4}\left(1+\xi-\xi^2-\xi^3\right), \tag{18.46}$$

$$N''_2(\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right).$$

Bezdimenzijska prirodna koordinata ξ poprima vrijednosti između –1 i 1, odnosno vrijedi $-1\le\xi\le1$. U skladu s izoparametarskom formulacijom, za jednoznačno opisivanje geometrije elementa prema relaciji (18.44), potrebno je definirati vrijednosti u čvorovima. Položaj čvorova zadan je koordinatama r_i i z_i, a nagib tangente na izvodnicu srednje plohe određen je relacijom

$$\operatorname{ctg}\theta_i=-\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_i. \tag{18.47}$$

Taj izraz moguće je prikazati pomoću derivacija po prirodnoj koordinati, koje se pojavljuju u relaciji (18.44), na sljedeći način:

$$\operatorname{ctg}\theta_i=-\frac{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)_i}{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)_i}. \tag{18.48}$$

Elementarna je lučna duljina meridijana, analogno relaciji (16.23), jednaka

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi. \tag{18.49}$$

Veličina $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_i$ u (18.47) jednoznačno je određena, dok vrijednosti $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)_i$ i $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)_i$ u izrazu (18.48) mogu biti proizvoljno odabrane. Pritom je potrebno voditi računa da krivulja bude glatka, što znači da se između čvorova ne pojavi petlja. U [119] predložen je izraz za $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}$ u obliku

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}=\frac{r_2-r_1}{2}, \tag{18.50}$$

koji slijedi iz linearne transformacije

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{r_2 - r_1}{2}\xi ,$$

gdje se bezdimenzijska koordinata mijenja od vrijednosti $\xi = -1$ u čvoru *1*, do iznosa $\xi = 1$ u čvoru *2*. Analogno je moguće uzeti i aproksimaciju za $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}$.

U (18.21) je pokazano da se deformacije srednje plohe ljuske izračunavaju deriviranjem tangencijalne i normalne komponente pomaka u i w. Budući da je pomoću interpolacijskih funkcija opisana raspodjela komponenata pomaka $\bar{u}$ i $\bar{w}$ u pravcu globalnih koordinatnih osi prema (18.45), potrebno je provesti sljedeću transformaciju:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix}. \tag{18.51}$$

Promjena kuta θ opisana je relacijom

$$\operatorname{ctg}\theta = -\frac{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)}, \tag{18.52}$$

gdje se derivacije globalnih koordinata izračunavaju pomoću (18.44). Derivacije komponenata pomaka $\bar{u}$ i $\bar{w}$ po prirodnoj koordinati ξ u izrazu (18.45) potrebno je zamijeniti s derivacijama po lučnoj duljini s, što se postiže pomoću izraza

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}, \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}, \tag{18.53}$$

a nakon uvrštavanja (18.49), dobiva se

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}s}. \tag{18.54}$$

Uvrštavanjem (18.45) u (18.51) te uz supstituciju (18.54), izvodi se međusobna ovisnost komponenata pomaka duž izvodnice srednje plohe ljuskastog elementa i stupnjeva slobode u čvorovima, što se prikazuje u poznatom matričnom obliku

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{18.55}$$

gdje je $\mathbf{u}^T = [u \quad w]$ vektor pomaka, a matrica funkcija oblika je funkcija bezdimenzijske koordinate ξ, $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi)$. Vektor stupnjeva slobode jednak je

$$\mathbf{v}^T = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2], \tag{18.56}$$

gdje je

$$\mathbf{v}_i^T = \left[\bar{u}_i \quad \bar{w}_i \quad \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}s}\right)_i \quad \left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}s}\right)_i\right], \qquad i = 1,2\,. \tag{18.57}$$

Matrica $\mathbf{B}$ izračunava se deriviranjem funkcija oblika prema izrazu $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}$ gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator iz relacije (18.21). Meridijalni polumjer zakrivljenosti R_1 mijenja se s koordinatom ξ, a moguće ga je odrediti pomoću parametarske relacije

$$R_1 = \frac{\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\xi^2}}, \tag{18.58}$$

gdje se derivacije globalnih koordinata izračunavaju pomoću (18.44). Budući da su funkcije oblika funkcije bezdimenzijske koordinate ξ, derivacije po lučnoj duljini s u kinematičkom diferencijalnom operatoru izračunavaju se pomoću sljedećih izraza koji su izvedeni primjenom lančanog pravila:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-3}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}. \tag{18.59}$$

Matrica krutosti izračunava se pomoću relacije (18.41), gdje je elementarna površina jednaka

$$\mathrm{d}A = 2r\pi\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{18.60}$$

Zbog složenosti podintegralnih funkcija, integriranje se najčešće provodi numerički.

U skladu s izoparametarskom formulacijom, uvjet konvergencije koji se odnosi na točno opisivanje pomaka krutog tijela u potpunosti je zadovoljen. Za razliku od pomaka krutog tijela, dvostruko zakrivljenim osnosimetričnim elementima nije moguće opisati konstantnu zakrivljenost. Nije teško zaključiti da stanje konstantne zakrivljenosti nije fizikalno moguće. Konstantnu zakrivljenost moguće je postići samo u graničnom slučaju kad se usitnjavanjem mreže smanjuje veličina konačnih elemenata.

Ako opterećenje osnosimetrične ljuske nije osnosimetrično, pojavljuju se tri komponente pomaka, a stanje deformacije opisano je sa šest komponenata koje su pomoću konstitutivnih relacija povezane sa šest komponenata vektora naprezanja, kao što je opisano u odjeljku 3.7. I u ovom slučaju moguće je primijeniti opisane osnosimetrične elemente, uz razvoj komponenata pomaka i opterećenja u Fourierove redove na način koji je opisan u odjeljku 15.2. Analogno postupku za rješavanje trodimenzijskih problema opisanom u tom odjeljku, provodi se izvođenje matrica krutosti i opterećenja za osnosimetrične ljuskaste elemente za pojedine harmonike u Fourierovu razvoju. Ovdje se taj postupak neće razmatrati, a detaljni prikaz može se naći u [48].

18.3. Dvostruko zakrivljeni ljuskasti elementi

18.3.1. Zakrivljeni elementi temeljeni na teoriji ljusaka

Dvostruko zakrivljeni elementi za analizu tankostjenih ljusaka proizvoljna oblika najčešće su izvedeni primjenom Kirchhoff-Loveova matematičkog modela koji je ukratko opisan u odjeljku 3.7. Kao i kod elemenata za analizu ploča, za normalnu komponentu pomaka potrebno je duž rubova zadovoljiti C^1-kontinuitet, što zahtijeva složenu formulaciju s velikim brojem stupnjeva slobode. Za jednostavnije elemente spomenuti kontinuitet u općem slučaju nije moguće postići, pa se kao i kod ploča razlikuju konformni i nekonformni elementi.

Ovdje će se opisati formulacija nekonformnoga trokutnog elementa s tri čvora s po 9 stupnjeva slobode. Srednja ploha elementa u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu opisana je krivocrtnim koordinatama u pravcu kojih su definirani stupnjevi slobode, slika 18.10. Vektor stupnjeva slobode jednak je

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}, \tag{18.61}$$

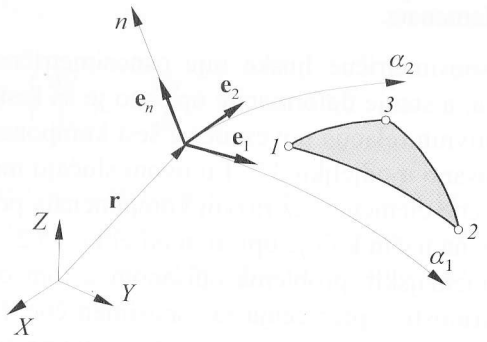
gdje su stupnjevi slobode u i-tom čvoru

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u & u_{,\alpha 1} & u_{,\alpha 2} & v & v_{,\alpha 1} & v_{,\alpha 2} & w & w_{,\alpha 1} & w_{,\alpha 2} \end{bmatrix}_i \quad i = 1,2,3. \tag{18.62}$$

Veličine $u_{,\alpha 1}$ i $u_{,\alpha 2}$ parcijalne su derivacije po krivocrtnim koordinatama α_1 i α_2

$$u_{,\alpha 1} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad u_{,\alpha 2} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}. \tag{18.63}$$

Analogno vrijedi i za derivacije ostalih komponenata vektora pomaka.



Slika 18.10. Proizvoljni dvostruko zakrivljeni element s 3 čvora

Elementarna površina srednje plohe proizvoljna oblika, koja je opisana krivocrtnim koordinatama prema slici 18.10., jednaka je [12, 50]

$$\mathrm{d}A = \sqrt{a}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2, \tag{18.64}$$

gdje je a veličina koja ovisi o geometriji srednje plohe i u općem slučaju funkcija je koordinata α_1 i α_2

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{18.65}$$

Veličine a_{11}, a_{22} i a_{12} jednake su

$$a_{11} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1,$$

$$a_{22} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2, \tag{18.66}$$

$$a_{12} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2.$$

U gornjim relacijama $\mathbf{r}$ je vektor položaja koji određuje geometriju srednje plohe, a funkcija je krivocrtnih koordinata

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2). \tag{18.67}$$

Vektor **r** može se prikazati pomoću komponenata u pravcu globalnih Kartezijevih koordinata, slika 18.10., na sljedeći način:

$$X = X(\alpha_1, \alpha_2), \quad Y = Y(\alpha_1, \alpha_2), \quad Z = Z(\alpha_1, \alpha_2). \tag{18.68}$$

Veličine $\mathbf{a}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}$ i $\mathbf{a}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}$ u izrazima (18.66) osnovni su vektori srednje plohe. Budući da su krivocrtne koordinate α_1 i α_2 crte glavnih zakrivljenosti, za osnovne vektore vrijedi $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$, na temelju čega je u (18.66) $a_{12} = 0$. U [86, 99] pokazano je da su Laméovi parametri uvedeni u odjeljku 3.7. jednaki veličini derivacija vektora položaja po krivocrtnim koordinatama

$$A_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right|, \quad A_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \right|. \tag{18.69}$$

Na taj su način veličine a_{11} i a_{22} u relaciji (18.66) jednake

$$a_{11} = A_1^2, \quad a_{22} = A_2^2. \tag{18.70}$$

Na temelju relacija (18.70) i (18.65) vrijedi $a = A_1^2 A_2^2$, pa se elementarna površina može prikazati pomoću Laméovih parametara u obliku

$$\mathrm{d}A = A_1 A_2 \, \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2. \tag{18.71}$$

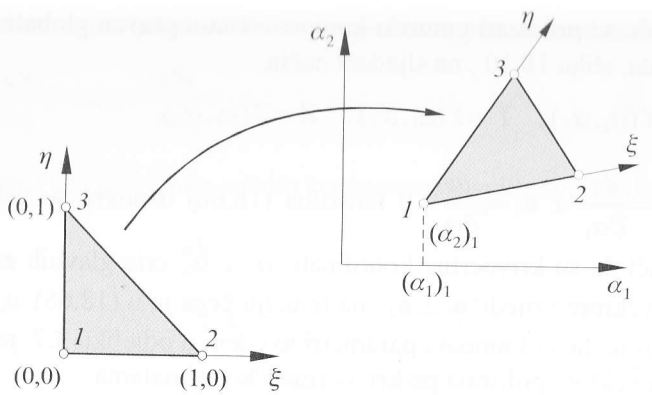
Jedinični vektori duž krivocrtnih koordinata jednaki su

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right|} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{a_{11}}},$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \right|} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{a_{22}}}, \tag{18.72}$$

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

Dvostruko zakrivljeni konačni element prema slici 18.10. izvodi se preslikavanjem jediničnog trokuta, koji je definiran u bezdimenzijskim prirodnim koordinatama ξ, η, u parametarsku ravninu α_1, α_2 prema slici 18.11.



Slika 18.11. Preslikavanje jediničnog trokuta u parametarsku ravninu α_1, α_2

Veza između koordinata α_1, α_2 i prirodnih koordinata ξ, η opisana je sljedećom linearnom transformacijom:

$$\alpha_1 = (\alpha_1)_1 + \left[(\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1\right]\xi + \left[(\alpha_1)_3 - (\alpha_1)_1\right]\eta ,$$

$$\alpha_2 = (\alpha_2)_1 + \left[(\alpha_2)_2 - (\alpha_2)_1\right]\xi + \left[(\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1\right]\eta . \tag{18.73}$$

Jacobijeva matrica u obliku

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1 & (\alpha_2)_2 - (\alpha_2)_1 \\ (\alpha_1)_3 - (\alpha_1)_1 & (\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1 \end{bmatrix}, \tag{18.74}$$

povezuje derivacije po prirodnim i krivocrtnim koordinatama na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix}. \tag{18.75}$$

Nakon invertiranja Jacobijeve matrice, derivacije po koordinatama α_1 i α_2 jednake su

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} (\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1 & (\alpha_2)_1 - (\alpha_2)_2 \\ (\alpha_1)_1 - (\alpha_1)_3 & (\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{18.76}$$

Sve tri komponente pomaka u, v i w opisane su polinomom trećeg stupnja prema [18], koji je pomoću bezdimenzijskih trokutnih koordinata prikazan relacijom (17.26) u odjeljku 17.2.1. Funkcije oblika moguće je izvesti u prirodnim koordinatama ξ i η, koje su prema [91] jednake

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= 1-3\xi^2-4\xi\eta-3\eta^2+2\xi^3+4\xi^2\eta+4\xi\eta^2+2\eta^3,\\
N_2(\xi,\eta) &= \xi-2\xi^2-\frac{3}{2}\xi\eta+\xi^3+\frac{3}{2}\xi^2\eta+\frac{1}{2}\xi\eta^2,\\
N_3(\xi,\eta) &= \eta-\frac{3}{2}\xi\eta-2\eta^2+\frac{1}{2}\xi^2\eta+\frac{3}{2}\xi\eta^2+\eta^3,\\
N_4(\xi,\eta) &= 3\xi^2+2\xi\eta-2\xi^3-2\xi^2\eta-2\xi\eta^2,\\
N_5(\xi,\eta) &= -\xi^2-\xi\eta+\xi^3+\xi^2\eta+\xi\eta^2,\\
N_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\xi\eta+\frac{1}{2}\xi^2\eta-\frac{1}{2}\xi\eta^2,\\
N_7(\xi,\eta) &= 2\xi\eta+3\eta^2-2\xi^2\eta-2\xi\eta^2-2\eta^3,\\
N_8(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\xi\eta-\frac{1}{2}\xi^2\eta+\frac{1}{2}\xi\eta^2,\\
N_9(\xi,\eta) &= -\xi\eta-\eta^2+\xi^2\eta+\xi\eta^2+\eta^3.
\end{aligned}
\tag{18.77}
$$

Opis raspodjele komponenata pomaka pomoću navedenih funkcija prikazan je na primjeru jedne tangencijalne komponente u obliku

$$
\begin{aligned}
u = {} & N_1(\xi,\eta)u_1+N_2(\xi,\eta)(u_{,\xi})_1+N_3(\xi,\eta)(u_{,\eta})_1+N_4(\xi,\eta)u_2+\\
& +N_5(\xi,\eta)(u_{,\xi})_2+N_6(\xi,\eta)(u_{,\eta})_2+N_7(\xi,\eta)u_3+\\
& +N_8(\xi,\eta)(u_{,\xi})_3+N_9(\xi,\eta)(u_{,\eta})_3,
\end{aligned}
\tag{18.78}
$$

gdje su $u_{,\xi}$ i $u_{,\eta}$ parcijalne derivacije po prirodnim koordinatama ξ i η. Analogno vrijedi za ostale dvije komponente v i w.

Ako se uvede vektor koji sadrži parcijalne derivacije po koordinatama ξ i η,

$$
\mathbf{v}'^{T} = \left[\mathbf{v}'_1 \quad \mathbf{v}'_2 \quad \mathbf{v}'_3\right],
\tag{18.79}
$$

gdje je za i-ti čvor

$$
\mathbf{v}'^{T}_i = \left[u \quad u_{,\xi} \quad u_{,\eta} \quad v \quad v_{,\xi} \quad v_{,\eta} \quad w \quad w_{,\xi} \quad w_{,\eta}\right]_i, \quad i=1,2,3,
\tag{18.80}
$$

sve tri komponente pomaka moguće je prikazati u matričnom obliku na sljedeći način:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 & \mathbf{N}'_2 & \mathbf{N}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix}. \tag{18.81}$$

Ovdje je $\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$, a submatrice $\mathbf{N}'_1$, $\mathbf{N}'_2$ i $\mathbf{N}'_3$ jednake su

$$\mathbf{N}'_1 = \begin{bmatrix} N_1(\xi,\eta) & N_2(\xi,\eta) & N_3(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1(\xi,\eta) & N_2(\xi,\eta) & N_3(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(\xi,\eta) & N_2(\xi,\eta) & N_3(\xi,\eta) \end{bmatrix} \tag{18.82}$$

$$\mathbf{N}'_2 = \begin{bmatrix} N_4(\xi,\eta) & N_5(\xi,\eta) & N_6(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4(\xi,\eta) & N_5(\xi,\eta) & N_6(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4(\xi,\eta) & N_5(\xi,\eta) & N_6(\xi,\eta) \end{bmatrix} \tag{18.83}$$

$$\mathbf{N}'_3 = \begin{bmatrix} N_7(\xi,\eta) & N_8(\xi,\eta) & N_9(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_7(\xi,\eta) & N_8(\xi,\eta) & N_9(\xi,\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_7(\xi,\eta) & N_8(\xi,\eta) & N_9(\xi,\eta) \end{bmatrix} \tag{18.84}$$

Budući da su stupnjevi slobode elementa opisani vektorima (18.61) i (18.62) koji sadrže derivacije po krivocrtnim koordinatama, potrebno je provesti transformaciju. Za komponente pomaka u prvom čvoru izvodi se relacija u obliku

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{R}_v \mathbf{v}_1 . \tag{18.85}$$

Matrica transformacije $\mathbf{R}_v$ jednaka je

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} & J_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \tag{18.86}$$

gdje su J_{11}, J_{12}, J_{21} i J_{22} članovi Jacobijeve matrice (18.74). Ista je matrica transformacije i za stupnjeve slobode koji su pridruženi ostalim čvorovima, pa za element s tri čvora vrijedi relacija

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}. \tag{18.87}$$

Uvrštavanjem (18.87) u (18.81) dobiva se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 & \mathbf{N}'_2 & \mathbf{N}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}, \tag{18.88}$$

odakle slijedi izraz za matricu funkcija oblika

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_1 \mathbf{R}_v & \mathbf{N}'_2 \mathbf{R}_v & \mathbf{N}'_3 \mathbf{R}_v \end{bmatrix}. \tag{18.89}$$

Pomoću (18.82) do (18.84) te (18.86) i (18.74), u matrici (18.89) izračunavaju se sljedeće funkcije oblika:

$$N_1 = N_1(\xi,\eta),$$

$$N_2 = [(\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1]N_2(\xi,\eta) + [(\alpha_1)_3 - (\alpha_1)_1]N_3(\xi,\eta),$$

$$N_2 = [(\alpha_2)_2 - (\alpha_2)_1]N_2(\xi,\eta) + [(\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1]N_3(\xi,\eta),$$

$$N_4 = N_4(\xi,\eta),$$

$$N_5 = [(\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1]N_5(\xi,\eta) + [(\alpha_1)_3 - (\alpha_1)_1]N_6(\xi,\eta), \tag{18.90}$$

$$N_6 = [(\alpha_2)_2 - (\alpha_2)_1]N_5(\xi,\eta) + [(\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1]N_6(\xi,\eta),$$

$$N_7 = N_7(\xi,\eta),$$

$$N_8 = [(\alpha_1)_2 - (\alpha_1)_1]N_8(\xi,\eta) + [(\alpha_1)_3 - (\alpha_1)_1]N_9(\xi,\eta),$$

$$N_9 = [(\alpha_2)_2 - (\alpha_2)_1]N_8(\xi,\eta) + [(\alpha_2)_3 - (\alpha_2)_1]N_9(\xi,\eta).$$

Lako je uočiti da funkcije oblika (18.90) ovise o koordinatama čvorova konačnog elementa u koordinatnom sustavu α_1, α_2.

Matrica **B** izračunava se deriviranjem funkcija oblika prema poznatoj relaciji $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator iz relacije (3.151). Nije teško zaključiti da članovi kinematičkoga diferencijalnog operatora ovise o geometriji srednje plohe ljuskastoga kontinuuma. Na taj je način matrica **B** funkcija krivocrtnih koordinata i u općem slučaju mijenja se duž srednje plohe. Točnim određivanjem geometrijskih parametara pomoću vektora položaja (18.67), moguće je točno opisati geometriju ljuskastoga kontinuuma. Osim toga, kinematički diferencijalni operator ovisi o primijenjenoj teoriji ljusaka pa je za različite teorije matrica **B** različita.

Pri deriviranju funkcija oblika po koordinatama α_1 i α_2 potrebno je primijeniti relacije (18.76). Derivacije višeg reda provode se na analogan način primjenom lančanog pravila. Matrica elastičnosti **D** određuje se prema relaciji (3.160). Izračunavanje sila u čvorovima poradi djelovanja vanjskog opterećenja provodi se na način koji je već opisan u prethodnim poglavljima. Za određivanje čvornih sila koje su posljedica površinskog opterećenja elementarna površina je opisana relacijama (18.64) i (18.71). Za izračunavanje sila poradi opterećenja koje djeluje duž ruba elementa, elementarna lučna duljina određuje se pomoću relacije

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}}, \tag{18.91}$$

gdje je $\mathrm{d}\mathbf{r}$ diferencijal vektora položaja

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}\mathrm{d}\alpha_2. \tag{18.92}$$

Zbog složenosti podintegralnih funkcija, za izračunavanje matrice krutosti i vektora čvornih sila potrebno je primijeniti numeričku integraciju.

U [54, 55] izveden je opisani element s 27 stupnjeva slobode u tenzorskoj formulaciji koja na relativno jednostavan način omogućuje primjenu različitih geometrija koje su opisane osnovnim tenzorskim relacijama [12]. Definirane su različite funkcije opterećenja, a različite kinematičke relacije omogućuju jed-

nostavnu primjenu različitih teorija tankostjenih ljusaka. Uz element s 27 stupnjeva slobode, izvedeno je više konačnih elemenata s različitim brojem stupnjeva slobode za linearnu i geometrijski nelinearnu analizu tankostjenih ljusaka. Slična formulacija proizvoljnih dvostruko zakrivljenih elemenata prikazana je u [35].

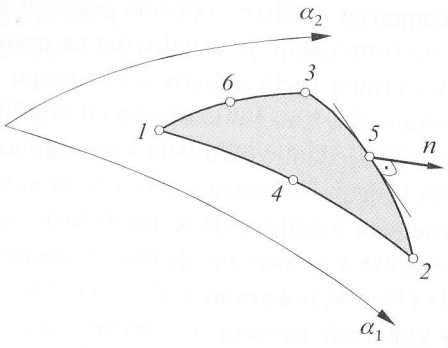
Formulacija u krivocrtnim koordinatama omogućuje točno opisivanje geometrije srednje plohe ljuske, što je važna prednost u odnosu na izoparametarsku formulaciju u kojoj je geometrija približno opisana pomoću interpolacijskih funkcija. Nedostatak opisane formulacije je osjetljivost na pomake krutog tijela, što znači da se pri pomaku krutog tijela u elementima mogu pojaviti deformacije, odnosno energija deformiranja. Kao što je opisano u odjeljku 9.1., ispravno opisivanje pomaka krutog tijela jedan je od uvjeta konvergencije rješenja, a utvrđuje se analizom vlastitih vrijednosti matrice krutosti. Ispravna formulacija dvostruko zakrivljenih elemenata zahtijeva da je prvih šest vlastitih vrijednosti jednako nuli, a to za elemente s točnim opisivanjem geometrije u općem slučaju nije moguće postići. U [54, 55] pokazano je da se vlastite vrijednosti smanjuju s usitnjavanjem mreže konačnih elemenata i smanjenjem zakrivljenosti srednje plohe. Osjetljivost na pomake krutog tijela također se smanjuje s povećavanjem stupnja polinoma funkcija pomaka. Osim toga, poželjno je da su sve tri komponente pomaka opisane polinomima istog stupnja. Ako su funkcije pomaka opisane polinomima nižeg stupnja, konvergenciju može ugroziti i pojava tzv. "membrane-locking" efekta [14, 119] koji predstavlja povećanu membransku krutost. Naime, pri čistom savijanju u elementu se pojavljuje membranski dio energije deformiranja, koji bi pri točnom modeliranju procesa deformiranja trebao biti jednak nuli.

U [53] je pokazano da je zadovoljavajuću konvergenciju moguće postići konformnim trokutnim elementima s 54 i 63 stupnja slobode. U [44] je izveden konformni četverokutni element s 48 stupnjeva slobode koji također pokazuje dobra numerička svojstva. Izvođenje svih spomenutih elemenata analogno je opisanom postupku za elemente s 27 stupnjeva slobode, pri čemu je primijenjena tenzorska formulacija [12].

Trokutni element s 54 stupnja slobode sastoji se od tri čvora u vrhovima trokuta prema slici 18.10. Sve tri komponente pomaka opisane su kondenziranim polinomom 5. stupnja prema [35] koji se izvodi iz potpunog polinoma, na način koji je opisan za konformni trokutni element za analizu savijanja ploča u odjeljku 17.2.2. Stupnjevi su slobode u svakom čvoru

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u & u_{,\alpha 1} & u_{,\alpha 2} & u_{,\alpha 1\alpha 1} & u_{,\alpha 1\alpha 2} & u_{,\alpha 2\alpha 2} \\ v & v_{,\alpha 1} & v_{,\alpha 2} & v_{,\alpha 1\alpha 1} & v_{,\alpha 1\alpha 2} & v_{,\alpha 2\alpha 2} \\ w & w_{,\alpha 1} & w_{,\alpha 2} & w_{,\alpha 1\alpha 1} & w_{,\alpha 1\alpha 2} & w_{,\alpha 2\alpha 2} \end{bmatrix}_i, \qquad i = 1,2,3, \tag{18.93}$$

gdje je $u_{,\alpha 1\alpha 1}$ dvostruka parcijalna derivacija po krivocrtnoj koordinati α_1, a analogno vrijedi i za ostale članove.



Slika 18.12. Dvostruko zakrivljeni trokutni element s čvorovima duž stranica

Konformni trokutni element sa 63 stupnja slobode, osim čvorova u vrhovima trokuta, sadrži dodatna tri čvora s po tri stupnja slobode, koja raspolavljaju stranice elementa, slika 18.12. Stupnjevi slobode u vrhovima trokuta jednaki su kao i za prethodno opisani element s 54 stupnja slobode. Stupnjevi slobode duž stranica su derivacije komponenata pomaka po pravcima normala na stranice elementa, koje leže u ravninama tangencijalnim na zakrivljenu plohu. Vektor stupnjeva slobode jednak je

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 & \mathbf{v}_6 \end{bmatrix}. \tag{18.94}$$

Vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ opisani su stupnjevima slobode (18.93), a $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ i $\mathbf{v}_6$ jednaki su

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u_{,n} & v_{,n} & w_{,n} \end{bmatrix}_i, \quad i = 4,5,6, \tag{18.95}$$

gdje je $u_{,n} = \dfrac{\partial u}{\partial n}$, a n je pravac normale na stranicu konačnog elementa. Ovdje su komponente pomaka opisane potpunim polinomom 5. stupnja koji uključuje 21 član prema (17.33).

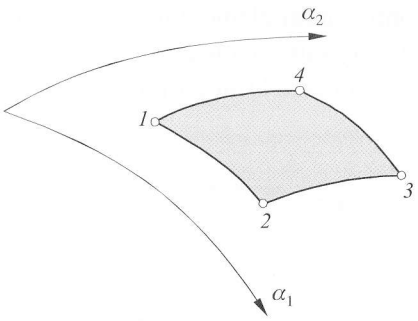
Dvostruko zakrivljeni četverokutni element s 48 stupnjeva slobode, slika 18.13., ima četiri čvora s po 12 stupnjeva slobode. Svaka komponenta pomaka opisana

je bikubičnim interpolacijskim funkcijama pomoću Hermiteovih polinoma. Vektor je stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}^T = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\right], \tag{18.96}$$

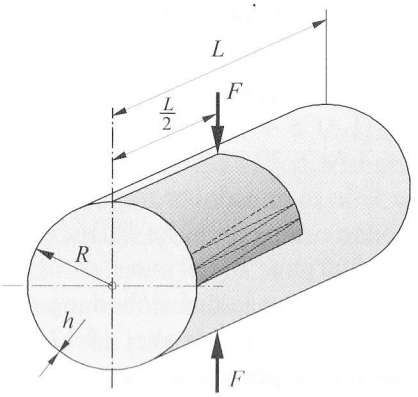
gdje je

$$\mathbf{v}_i^T = \left[u \quad u_{,\alpha 1} \quad u_{,\alpha 2} \quad u_{,\alpha 1\alpha 2} \quad v \quad v_{,\alpha 1} \quad v_{,\alpha 2} \quad v_{,\alpha 1\alpha 2} \quad w \quad w_{,\alpha 1} \quad w_{,\alpha 2} \quad w_{,\alpha 1\alpha 2}\right]_i . \tag{18.97}$$



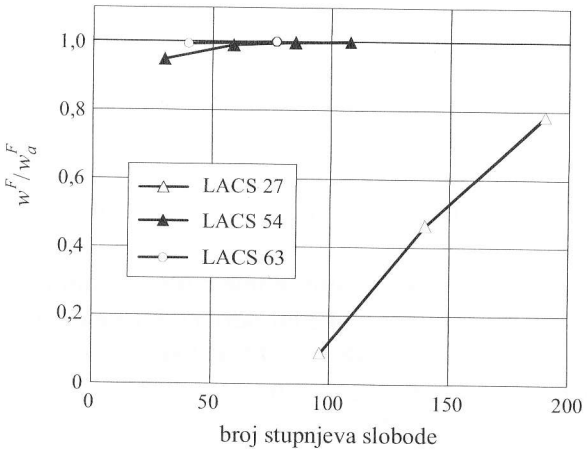
Slika 18.13. Dvostruko zakrivljeni četverokutni element

U [53] je prikazana konvergencija gore spomenutih trokutnih elemenata s 27, 54 i 63 stupnja slobode na primjeru tanke cilindrične ljuske dijametralno opterećene koncentriranim silama, prema slici 18.14. Cilindar je na oba kraja slobodan. Geometrijski parametri su $R = 125{,}81$ mm, $h = 3{,}93$ mm, $L = 262{,}89$ mm, a iznos opterećenja je $F = 444{,}82$ N. Materijalne konstante su $E = 72{,}397$ GPa i $\nu = 0{,}3125$. Zbog simetrije, provedena je analiza samo jedne osmine ljuske.



Slika 18.14. Cilindrična ljuska opterećena koncentriranim silama [53]

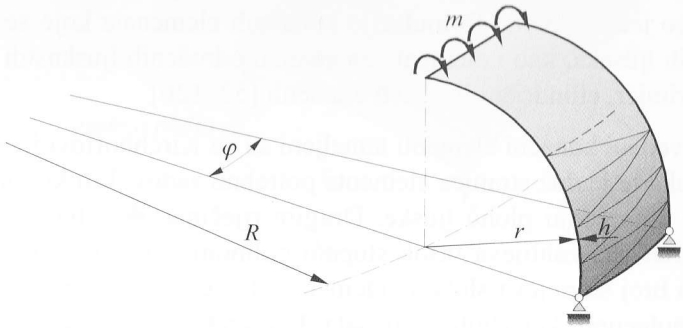
Poznato je da taj primjer uključuje znatne pomake krutog tijela, što je razlogom njegovoj primjeni za testiranje zakrivljenih elemenata koji mogu pokazati odgovarajuću osjetljivost na spomenute pomake. Konvergencija normalnog pomaka w^F na mjestu djelovanja sile prema točnom rješenju, prikazana je na slici 18.15. U dijagramu je na ordinati označena vrijednost dobivena pomoću metode konačnih elemenata podijeljena s točnim analitičkim rješenjem $w_a^F = 0,62$ mm prema [111], a na apscisi je broj stupnjeva slobode proračunskog modela. Elementi s 27, 54 i 63 stupnja slobode označeni su s LACS 27, LACS 54 i LACS 63. Kao što se vidi, brzo približavanje točnom rješenju postignuto je konformnim elementima s visokim stupnjem polinoma funkcija pomaka, za razliku od rješenja dobivenih nekonformnim elementom s 27 stupnjeva slobode. Na taj je način potvrđeno da ovdje opisani elementi s 54 i 63 stupnja slobode pokazuju zanemarivu osjetljivost na pomake krutog tijela.



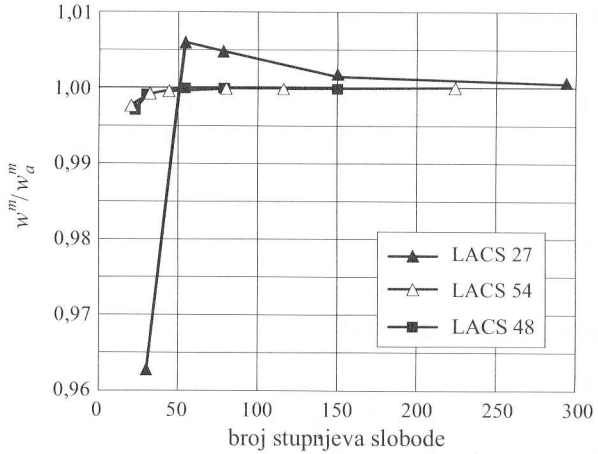
Slika 18.15. Konvergencija trokutnih elemenata s različitim brojem stupnjeva slobode [53]

Konvergencija rješenja dobivenih pomoću konformnoga četverokutnog elementa s 48 stupnjeva slobode (LACS 48), u usporedbi s rješenjima izračunatim pomoću trokutnih elemenata LACS 27 i LACS 54, razmatrana je u [100]. Analiziran je dio torusne ljuske koja je na jednom rubu opterećena momentom savijanja, a na drugom je slobodno oslonjena, slika 18.16. Geometrija je opisana veličinama $R = 2000$ mm, $r = 200$ mm, $h = 10$ mm i $\varphi = 2^0$, a materijalne konstante su $E = 200$ GPa i $\nu = 0.3$. Moment je duž slobodnog ruba ljuske jednoliko raspodijeljen i iznosi $m = 10$ kNmm/mm. Na slici 18.17. prikazan je omjer numeričkog i analitičkog rješenja za pomak u pravcu normale na srednju plohu, w^m / w_a^m, ovisno o broju stupnjeva slobode proračunskog modela. Analitičko je rješenje za zadano opterećenje prema [30] jednako $w_a^m = 8,728$ mm. Lako je

uočiti dobru konvergenciju rješenja dobivenu pomoću četverokutnog elementa, a nekonformni element s 27 stupnjeva slobode pokazuje relativno lošu i nemonotonu konvergenciju, što je karakteristično za nekonformne elemente.



Slika 18.16. Torusna ljuska opterećena jednoliko kontinuiranim momentom savijanja



Slika 18.17. Konvergencija četverokutnog elementa u usporedbi s rješenjima dobivenim pomoću trokutnih elemenata [100]

Osim opisane formulacije dvostruko zakrivljenih konačnih elemenata u krivocrtnim koordinatama koja omogućuje točno opisivanje geometrije srednje plohe ljuske, u literaturi je izvedena izoparametarska formulacija konformnih dvostruko zakrivljenih konačnih elemenata [9, 43]. U skladu s izoparametarskom formulacijom koja je opisana u 16. poglavlju, geometrija srednje plohe ljuskastoga kontinuuma i komponente pomaka opisane su istim interpolacijskim funkcijama. Srednja ploha ljuske opisana je Kartezijevim koordinatama u pravcu kojih su definirane komponente pomaka. Potrebno je naglasiti da su u izoparametarskoj formulaciji u potpunosti ispunjeni svi kriteriji konvergencije. Za raz-

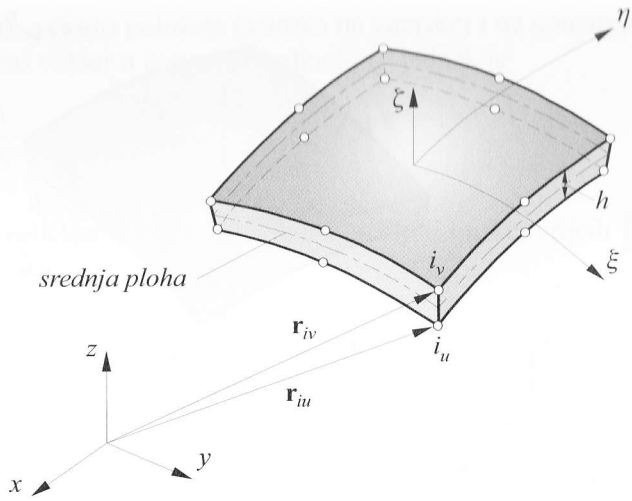
liku od opisane formulacije u krivocrtnim koordinatama, pomoću tih elemenata pomake krutog tijela moguće je točno opisati. Znatan nedostatak izoparametarskih elemenata je približno opisivanje geometrije srednje plohe ljuske, što u proračun unosi odgovarajuće geometrijske imperfekcije. U literaturi je moguće naći i mnogo jednostavnije formulacije konačnih elemenata koje se temelje na teoriji plitkih ljusaka, kao i elemente za analizu određenih ljuskastih oblika kao što su, na primjer, cilindrični ljuskasti elementi [52, 126].

Svi gore navedeni konačni elementi temeljeni su na Kirchhoffovoj teoriji tankostjenih ljusaka te je duž stranica elementa potrebno zadovoljiti kontinuitet nagiba normale na srednju plohu ljuske. Drugim riječima, potrebno je zadovoljiti C^1-kontinuitet, što zahtijeva visok stupanj polinoma funkcija pomaka i na taj način veliki broj stupnjeva slobode elementa. To je, naravno, povezano sa složenom formulacijom konačnih elemenata. U literaturi se mogu naći zakrivljeni elementi za analizu tankostjenih ljusaka s interpolacijskim funkcijama nižeg reda za koje je zahtjev za potrebnim C^1-kontinuitetom ublažen, a Kirchhoffova hipoteza zadovoljena je samo u odgovarajućem broju diskretnih točaka [126]. Takvi elementi nazivaju se diskretni Kirchhoffovi elementi (Discrete Kirchhoff Theory Elements).

U praksi se često primjenjuju degenerirani ljuskasti elementi koji su izvedeni iz trodimenzijskih izoparametarskih elemenata uz odgovarajuće pretpostavke, pri čemu su u formulaciju uključene poprečne kutne deformacije. Za razliku od gore opisanih elemenata, interpolacijske funkcije mogu biti znatno nižeg reda, a duž rubova elemenata potrebno je zadovoljiti samo C^0-kontinuitet.

18.3.2. Degenerirani ljuskasti elementi

Degenerirani ljuskasti elementi izvode se iz trodimenzijskih izoparametarskih elemenata uvođenjem pretpostavki da normale na srednju plohu ljuske nakon deformiranja ostaju ravne, ali ne i okomite, te da vlakna u pravcu normale ne mijenjaju duljinu. Tako je ljuskasti kontinuum moguće opisati pomoću trodimenzijskih elemenata s dva čvora po debljini, odnosno s čvorovima na unutarnjoj i na vanjskoj plohi, prema slici 18.18. Budući da su pomaci u pravcu normale jednaki, svakom paru čvorova po debljini trodimenzijskog elementa pridruženo je 5 stupnjeva slobode. Pretpostavka da normale na srednju plohu nakon deformiranja ne ostaju okomite, dopušta uvođenje kutnih poprečnih deformacija u formulaciju, što je u skladu s Reissner-Mindlinovim kinematičkim modelom u teoriji ljusaka [119]. Također se pretpostavlja da su komponente naprezanja u pravcu normale na srednju plohu jednake nuli.



Slika 18.18. Trodimenzijski ljuskasti element

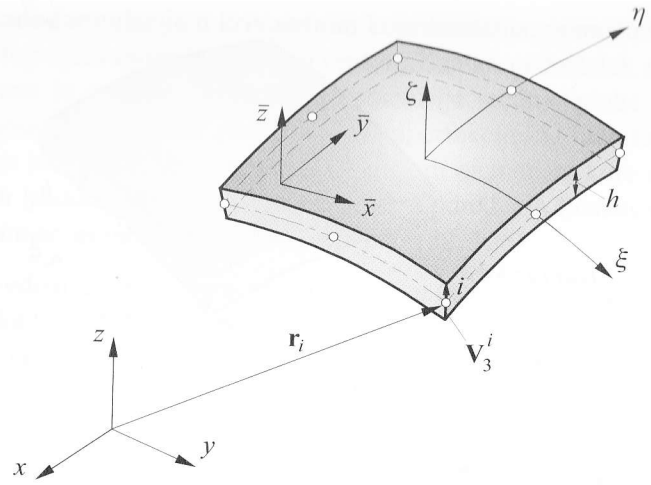
U skladu s izoparametarskom formulacijom, geometrija elementa prema slici 18.18. opisana je u Kartezijevu koordinatnom sustavu u obliku

$$x = \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1+\zeta}{2}x_{iu} + \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1-\zeta}{2}x_{iv},$$

$$y = \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1+\zeta}{2}y_{iu} + \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1-\zeta}{2}y_{iv}, \qquad (18.98)$$

$$z = \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1+\zeta}{2}z_{iu} + \sum N_i(\xi,\eta)\frac{1-\zeta}{2}z_{iv},$$

gdje su ξ i η bezdimenzijske prirodne koordinate na srednjoj plohi ljuske, koje su u općem slučaju zakrivljene. Treća koordinata ζ je ravna koordinata duž debljine ljuske koja se ne mora poklapati s vektorom normale, a često je samo približno okomita na srednju plohu. Kao što je spomenuto u 16. poglavlju pri razmatranju izoparametarske formulacije, bezdimenzijske koordinate poprimaju vrijednosti između –1 i +1. $N_i(\xi,\eta)$ su dvodimenzijske interpolacijske funkcije, a x_{iu}, y_{iu}, z_{iu} i x_{iv}, y_{iv}, z_{iv} su koordinate čvorova na unutarnjoj i na vanjskoj plohi ljuske.



Slika 18.19. Ljuskasti element s čvorovima na srednjoj plohi

Transformacijom relacija (18.98), geometrija elementa može se opisati pomoću koordinata čvorova na srednjoj plohi x_i, y_i, z_i i vektora $\mathbf{V}_3^i$ u pravcu koordinate ζ, prema slici 18.19., na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} V_{3x}^i \\ V_{3y}^i \\ V_{3z}^i \end{bmatrix}, \tag{18.99}$$

gdje su V_{3x}^i, V_{3y}^i, V_{3z}^i komponente vektora $\mathbf{V}_3^i$ u pravcu Kartezijevih koordinata x, y, z, a mogu se prikazati pomoću koordinata čvorova na vanjskoj i na unutarnjoj plohi

$$\begin{bmatrix} V_{3x}^i \\ V_{3y}^i \\ V_{3z}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iv} \\ y_{iv} \\ z_{iv} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{iu} \\ y_{iu} \\ z_{iu} \end{bmatrix}. \tag{18.100}$$

Koordinate čvorova na srednjoj plohi jednake su

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x_{iu} \\ y_{iu} \\ z_{iu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{iv} \\ y_{iv} \\ z_{iv} \end{bmatrix} \right). \tag{18.101}$$

Relacija (18.100) može se napisati u obliku

$$\mathbf{V}_3^i = \mathbf{r}_{iv} - \mathbf{r}_{iu}, \tag{18.102}$$

gdje su $\mathbf{r}_{iv}$ i $\mathbf{r}_{iu}$ vektori položaja čvorova na vanjskoj i na unutarnjoj plohi, slika 18.18. Jedinični vektor u pravcu koordinate ζ jednak je

$$\mathbf{e}_{i3} = \frac{\mathbf{V}_3^i}{\left\|\mathbf{V}_3^i\right\|}. \tag{18.103}$$

Budući da je veličina vektora $\mathbf{V}_3^i$ jednaka debljini ljuske, vrijedi $\left\|\mathbf{V}_3^i\right\| = h_i$ pa je vektor $\mathbf{V}_3^i$ jednak

$$\mathbf{V}_3^i = h_i\,\mathbf{e}_{i3}. \tag{18.104}$$

Jedinični vektor $\mathbf{e}_{i3}$ može se prikazati pomoću komponenata u pravcu koordinata x, y, z

$$\mathbf{e}_{i3}^T = \begin{bmatrix} a_{3x}^i & a_{3y}^i & a_{3z}^i \end{bmatrix}, \tag{18.105}$$

koje su jednake kosinusima smjera vektora $\mathbf{V}_3^i$

$$\begin{aligned} a_{3x}^i &= \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_{i3}, \mathbf{e}_x), \\ a_{3y}^i &= \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_{i3}, \mathbf{e}_y), \\ a_{3z}^i &= \cos\sphericalangle(\mathbf{e}_{i3}, \mathbf{e}_z). \end{aligned} \tag{18.106}$$

Jedinični vektori $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ u pravcu su Kartezijevih koordinata x, y i z. Na temelju (18.104) i (18.105), komponente vektora $\mathbf{V}_3^i$ mogu se prikazati pomoću kosinusa smjera (18.106), pa se relacija (18.99) može napisati u obliku

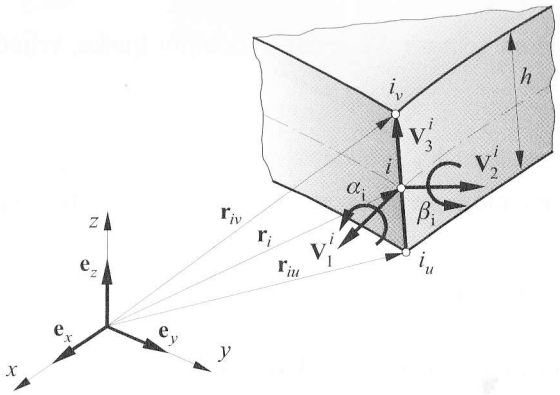
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2} \sum N_i(\xi,\eta) h_i \begin{bmatrix} a_{3x}^i \\ a_{3y}^i \\ a_{3z}^i \end{bmatrix}. \tag{18.107}$$

U skladu s gore navedenim pretpostavkama o deformiranju, polje pomaka u ljuskastom kontinuumu moguće je opisati pomoću pomaka u čvorovima na srednjoj plohi i kutova zakreta vektora $\mathbf{V}_3^i$. Zakret se opisuje rotacijama oko dva međusobno okomita pravca koja su okomita na $\mathbf{V}_3^i$. Pravce koji opisuju rotacije moguće je definirati na više različitih načina. Ovdje se uvode vektori $\mathbf{V}_1^i$ i $\mathbf{V}_2^i$, koji određuju pravce rotacija α_i i β_i, prema slici 18.20., na sljedeći način:

$$\mathbf{V}_1^i = \mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_3^i, \quad \mathbf{V}_2^i = \mathbf{V}_3^i \times \mathbf{V}_1^i. \tag{18.108}$$

Njihovi kosinusi smjera određeni su komponentama jediničnih vektora $\mathbf{e}_{i1}$ i $\mathbf{e}_{i2}$

$$\mathbf{e}_{i1} = \frac{\mathbf{V}_1^i}{\left\|\mathbf{V}_1^i\right\|} = \begin{bmatrix} a_{1x}^i \\ a_{1y}^i \\ a_{1z}^i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{i2} = \frac{\mathbf{V}_2^i}{\left\|\mathbf{V}_2^i\right\|} = \begin{bmatrix} a_{2x}^i \\ a_{2y}^i \\ a_{2z}^i \end{bmatrix}. \tag{18.109}$$



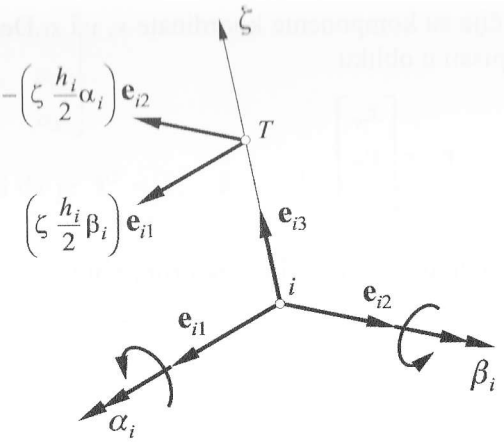
Slika 18.20. Vektor $\mathbf{V}_3^i$ zajedno s vektorima koji određuju pravce rotacije

Pomak proizvoljne točke T na pravcu vektora $\mathbf{V}_3^i$, koja je od čvora srednje plohe i udaljena za iznos $\zeta\frac{h_i}{2}$, jednak je pomaku spomenutog čvora opisanoga komponentama u_i, v_i, w_i, kojima su pribrojene komponente relativnog pomaka koji je opisan vektorima $\left(\zeta\frac{h_i}{2}\beta_i\right)\mathbf{e}_{i1}$ i $-\left(\zeta\frac{h_i}{2}\alpha_i\right)\mathbf{e}_{i2}$, prema slici 18.21. Pritom se pretpostavljaju male rotacije α_i i β_i. Na taj su način komponente pomaka proizvoljne točke u elementu, u skladu s izoparametarskom formulacijom, jednake

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2}\sum N_i(\xi,\eta)h_i\begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{i2} & \mathbf{e}_{i1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}. \tag{18.110}$$

Ako se jedinični vektori $\mathbf{e}_{i1}$ i $\mathbf{e}_{i2}$ prikažu pomoću komponenata prema (18.109), relacija (18.110) može se napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \frac{\zeta}{2}\sum N_i(\xi,\eta)h_i\begin{bmatrix} -a_{2x}^i & a_{1x}^i \\ -a_{2y}^i & a_{1y}^i \\ -a_{2z}^i & a_{1z}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}. \tag{18.111}$$



Slika 18.21. Vektor pomaka proizvoljne točke T na koordinati ζ

Transformacijom izraza (18.111) izvodi se uobičajena matrična relacija za vektor pomaka

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}\,, \tag{18.112}$$

gdje je

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_i & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}. \tag{18.113}$$

Indeks m označuje broj čvorova u elementu, a $\mathbf{v}_i$ vektor je stupnjeva slobode u i-tom čvoru, $1 \le i \le m$

$$\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix}. \tag{18.114}$$

Kako bi se pretpostavka, da je komponenta naprezanja u pravcu normale na srednju plohu ljuskastog elementa jednaka nuli, mogla uključiti u formulaciju, potrebno je na srednjoj plohi ljuskastoga kontinuuma definirati lokalni koordinatni sustav $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, slika 18.19. Pravac koordinate $\bar{z}$ okomit je na srednju plohu, a određen je jediničnim vektorom $\bar{\mathbf{e}}_z$

$$\bar{\mathbf{e}}_z = \frac{\mathbf{r}_{,\xi} \times \mathbf{r}_{,\eta}}{\left\| \mathbf{r}_{,\xi} \times \mathbf{r}_{,\eta} \right\|}, \tag{18.115}$$

gdje je $\mathbf{r}_{,\xi} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}$ vektor tangencijalan na zakrivljenu koordinatu ξ na srednjoj plohi, a analogno vrijedi za $\mathbf{r}_{,\eta}$. Vektor $\mathbf{r}$ je vektor položaja proizvoljne točke

na srednjoj plohi, čije su komponente koordinate x, y i z. Derivacije vektora položaja mogu se napisati u obliku

$$\mathbf{r}_{,\xi} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \\ z_{,\xi} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{,\eta} = \begin{bmatrix} x_{,\eta} \\ y_{,\eta} \\ z_{,\eta} \end{bmatrix}. \tag{18.116}$$

Neka je pravac $\bar{x}$ određen jediničnim vektorom tangencijalnim na koordinatu ξ

$$\bar{\mathbf{e}}_x = \frac{\mathbf{r}_{,\xi}}{\|\mathbf{r}_{,\xi}\|}, \tag{18.117}$$

a jedinični vektor u pravcu $\bar{y}$ jednak je

$$\bar{\mathbf{e}}_y = \bar{\mathbf{e}}_z \times \bar{\mathbf{e}}_x .$$

Navedeni jedinični vektori mogu se prikazati pomoću komponenata

$$\bar{\mathbf{e}}_x = \begin{bmatrix} a_{\bar{x}x} \\ a_{\bar{x}y} \\ a_{\bar{x}z} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} a_{\bar{y}x} \\ a_{\bar{y}y} \\ a_{\bar{y}z} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_z = \begin{bmatrix} a_{\bar{z}x} \\ a_{\bar{z}y} \\ a_{\bar{z}z} \end{bmatrix}, \tag{18.118}$$

gdje je

$$\begin{aligned} a_{\bar{x}x} &= \cos \sphericalangle\left(\bar{\mathbf{e}}_x, \mathbf{e}_x\right), \\ a_{\bar{x}y} &= \cos \sphericalangle\left(\bar{\mathbf{e}}_x, \mathbf{e}_y\right), \\ a_{\bar{x}z} &= \cos \sphericalangle\left(\bar{\mathbf{e}}_x, \mathbf{e}_z\right). \end{aligned} \tag{18.119}$$

Analogno vrijedi za ostale komponente.

Komponente pomaka u pravcu lokalnoga koordinatnog sustava povezane su s komponentama u pravcu koordinatnih osi x, y, z pomoću matrice transformacije na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \tag{18.120}$$

gdje je matrica transformacije

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{\bar{x}x} & a_{\bar{x}y} & a_{\bar{x}z} \\ a_{\bar{y}x} & a_{\bar{y}y} & a_{\bar{y}z} \\ a_{\bar{z}x} & a_{\bar{z}y} & a_{\bar{z}z} \end{bmatrix}, \tag{18.121}$$

Nije teško zaključiti da je $\mathbf{T}^T = \left[\bar{\mathbf{e}}_x \quad \bar{\mathbf{e}}_y \quad \bar{\mathbf{e}}_z\right]$. Ako se zbog lakšega zapisivanja indeksi x, y, z i $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zamijene brojevima 1, 2, 3, pri čemu je $a_{\bar{x}x} = a_{11}$, $a_{\bar{x}y} = a_{12}, \ldots, a_{\bar{z}\bar{z}} = a_{33}$, prema [4] matrica transformacije može se napisati u obliku

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{18.122}$$

Komponente deformacije u odnosu na lokalni koordinatni sustav izračunavaju se pomoću relacije

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{D}}_k \, \bar{\mathbf{u}}, \tag{18.123}$$

gdje je kinematički diferencijalni operator $\bar{\mathbf{D}}_k$, analogno relaciji (3.15), jednak

$$\bar{\mathbf{D}}_k = \begin{bmatrix} \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\bar{z}} \\ \partial_{\bar{y}} & \partial_{\bar{x}} & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{z}} & \partial_{\bar{y}} \\ \partial_{\bar{z}} & 0 & \partial_{\bar{x}} \end{bmatrix}, \tag{18.124}$$

a komponente deformacije su

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \left[\bar{\varepsilon}_x \quad \bar{\varepsilon}_y \quad \bar{\varepsilon}_z \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{zx}\right]. \tag{18.125}$$

Pomoću relacija (18.120) i (18.123), na temelju kinematičke relacije (3.12) u globalnom koordinatnom sustavu, nakon odgovarajućih matematičkih transformacija, moguće je dobiti vezu između komponenata deformacije u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_\varepsilon \, \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{18.126}$$

gdje je matrica transformacije $\mathbf{T}_\varepsilon$ jednaka

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{11}a_{12} & a_{12}a_{13} & a_{13}a_{11} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & a_{21}a_{22} & a_{22}a_{23} & a_{23}a_{21} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & a_{31}a_{32} & a_{32}a_{33} & a_{33}a_{31} \\ 2a_{11}a_{21} & 2a_{12}a_{22} & 2a_{13}a_{23} & a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12} & a_{12}a_{23}+a_{22}a_{13} & a_{13}a_{21}+a_{23}a_{11} \\ 2a_{21}a_{31} & 2a_{22}a_{32} & 2a_{23}a_{33} & a_{21}a_{32}+a_{31}a_{22} & a_{22}a_{33}+a_{32}a_{23} & a_{23}a_{31}+a_{33}a_{21} \\ 2a_{31}a_{11} & 2a_{32}a_{12} & 2a_{33}a_{13} & a_{31}a_{12}+a_{11}a_{32} & a_{32}a_{13}+a_{12}a_{33} & a_{33}a_{11}+a_{13}a_{31} \end{bmatrix}. \tag{18.127}$$

Veza između naprezanja u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu izvodi se iz invarijantnosti virtualnog rada

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{18.128}$$

Komponente su naprezanja u lokalnom koordinatnom sustavu

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}^T = \left[\overline{\sigma}_x \quad \overline{\sigma}_y \quad \overline{\sigma}_z \quad \overline{\tau}_{xy} \quad \overline{\tau}_{yz} \quad \overline{\tau}_{zx}\right]. \tag{18.129}$$

Veza između naprezanja i deformacije jednaka je $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\mathbf{D}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Njezinim uvrštavanjem u $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ dobiva se veza između matrica elastičnosti u globalnom i lokalnom koordinatnom sustavu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\mathbf{D}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\mathbf{D}}\,\mathbf{T}_\varepsilon\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\mathbf{D}}\,\mathbf{T}_\varepsilon. \tag{18.130}$$

Na taj način, matrica elastičnosti u lokalnom koordinatnom sustavu $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ transformira se u odnosu na globalne koordinate x, y, z pomoću relacije

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\varepsilon^T\overline{\mathbf{D}}\,\mathbf{T}_\varepsilon. \tag{18.131}$$

Uz uvjet $\overline{\sigma}_z = 0$, što je u skladu s uvedenim pretpostavkama o deformiranju ljuskastoga kontinuuma, na poznati se način u mehanici deformabilnih tijela [3, 4] izvodi matrica elastičnosti $\overline{\mathbf{D}}$

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{6}\dfrac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{6}\dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{18.132}$$

Faktor $\frac{5}{6}$ korekcijski je faktor koji se odnosi na raspodjelu poprečnih kutnih deformacija po debljini ljuske. Na temelju prikazane formulacije, izračunavaju se konstantne kutne deformacije po debljini ljuske, a njihova je stvarna raspodjela po paraboli drugog reda. Konstitutivne relacije u lokalnom koordinatnom sustavu u matričnom obliku su jednake

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma}_x \\ \overline{\sigma}_y \\ 0 \\ \overline{\tau}_{xy} \\ \overline{\tau}_{yz} \\ \overline{\tau}_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}\frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon}_x \\ \overline{\varepsilon}_y \\ 0 \\ \overline{\gamma}_{xy} \\ \overline{\gamma}_{yz} \\ \overline{\gamma}_{zx} \end{bmatrix}. \tag{18.133}$$

Ovdje se, naravno, pretpostavlja da su početna naprezanja i početne deformacije jednake nuli.

Matrica **B**, koja povezuje deformacije u elementu sa stupnjevima slobode, izvodi se u odnosu na globalni Kartezijev koordinatni sustav na poznati način pomoću relacije $\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{D}_k$ kinematički diferencijalni operator (3.15). Budući da su funkcije oblika u matrici **N** funkcije bezdimenzijskih koordinata ξ, η i ζ, za izračunavanje derivacija po koordinatama x, y, z potrebno je primijeniti poznatu, već prethodno spomenutu transformaciju

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \tag{18.134}$$

gdje je **J** Jacobijeva matrica prikazana relacijom (16.50). Elementarni volumen je jednak

$$\mathrm{d}V = \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta. \tag{18.135}$$

Izraz za matricu krutosti potpuno je analogan relaciji za trodimenzijske izoparametarske elemente. Na temelju (18.131), matrica krutosti može se napisati u obliku

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{T}_\varepsilon^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B} \det \mathbf{J}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta\,. \tag{18.136}$$

Kao što je uobičajeno za izoparametarsku formulaciju, integriranje se provodi numerički, najčešće primjenom Gaussova postupka. Integracija po debljini elementa relativno je jednostavna pa se može provesti analitički, što pridonosi smanjenju vremena računanja. Sile u čvorovima poradi opterećenja po površini ili duž rubova elementa izračunavaju se na već opisani standardni način.

Za procjenu stanja naprezanja u ljuskastim konstrukcijama, komponente naprezanja prikladno je prikazati u lokalnom koordinatnom sustavu $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Uvrštavanjem relacije (18.126) u $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{D}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, te uz supstituciju $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v}$, izvodi se relacija

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{D}} \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}\mathbf{v}. \tag{18.137}$$

Komponente naprezanja prikazane su u konstitutivnoj relaciji (18.133).

Za razliku od ovdje prikazane formulacije, gdje je matrica **B** izvedena u globalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu, opisani konačni element moguće je izvesti na takav način da se spomenuta matrica koja opisuje raspodjelu deformacije u elementu, izvede u lokalnom koordinatnom sustavu $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, kao što je prikazano u [119]. Pritom se pomoću Jacobijeve matrice izračunavaju derivacije po globalnim koordinatama, koje je potrebno transformirati u derivacije komponenata pomaka u odnosu na lokalne koordinate. Na taj se način dobiva relacija $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}$, gdje je $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \left[\bar{\varepsilon}_x \quad \bar{\varepsilon}_y \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{zx}\right]$. Izraz za matricu krutosti analogan je relaciji (16.52).

Nedostatak je ovdje opisanog elementa što se osim "membrane-locking" efekta, u tankostjenim ljuskama pojavljuje također nepoželjni "shear-locking" efekt [14, 119]. Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, "membrane-locking" nastaje u zakrivljenim elementima kada stupanj polinoma funkcije pomaka nije dovoljno visok. Do pojave "shear-locking" efekta, u tankostjenim ljuskama dovode poprečne kutne deformacije koje su uključene u formulaciju elementa. Naime, za tanke ljuskaste elemente izračunava se mnogo veća posmična krutost od realne vrijednosti. Drugim riječima, dio energije deformiranja od poprečnih kutnih deformacija mnogo je veći od realnog iznosa. Taj nedostatak osobito se manifestira pri čistom savijanju kada dio energije deformiranja od kutnih deformacija može poprimiti znatan iznos, što je fizikalno neutemeljeno. Povećana

krutost uvelike narušava konvergenciju rješenja. Budući da je krutost diskretizirane konstrukcije veća od stvarne, nije se moguće približiti točnom rješenju jer se uvijek izračunavaju manji pomaci od realnih vrijednosti.

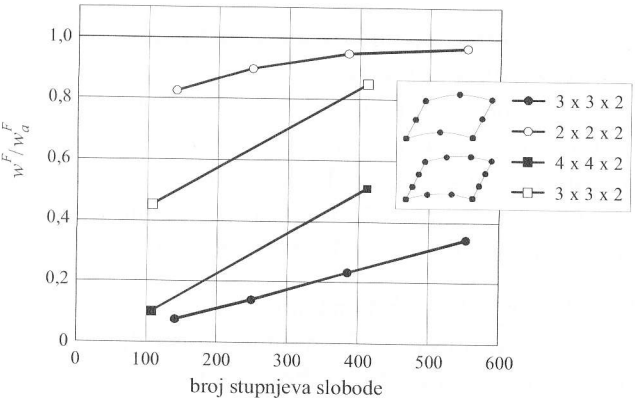
Oba spomenuta nepoželjna efekta moguće je umanjiti povećanjem stupnja polinoma funkcija pomaka. Osim toga, primjenjuju se postupci selektivne i reducirane integracije o kojima je već bilo govora u odjeljku 16.4. Drugi je način eliminiranja "lockinga" pomoću tzv. "assumed strain" postupka [42], pri čemu se deformacije koje uzrokuju "locking" izračunavaju u odgovarajućim točkama na srednjoj plohi elementa, a nakon toga se njihova raspodjela opisuje interpolacijskim funkcijama. Nadalje, primjenjuju se mješovite formulacije koje se temelje na proširenim varijacijskim principima razmatranim u odjeljku 4.6., gdje su neovisne varijable osim pomaka i deformacije.

Poznato je da način deformiranja ljuskastih konstrukcija u velikoj mjeri ovisi o geometriji, rubnim uvjetima i opterećenju. Vrlo mala promjena geometrije i rubnih uvjeta može znatno promijeniti ponašanje konstrukcije. Ljuska u kojoj dominira membransko stanje naprezanja može vrlo brzo prijeći u stanje s jako izraženim naprezanjima od savijanja. To je razlog da je vrlo teško izvesti konačni element koji može dovoljno točno opisati ponašanje ljuskaste konstrukcije, bez obzira na promjenu geometrije, rubnih uvjeta i opterećenja.

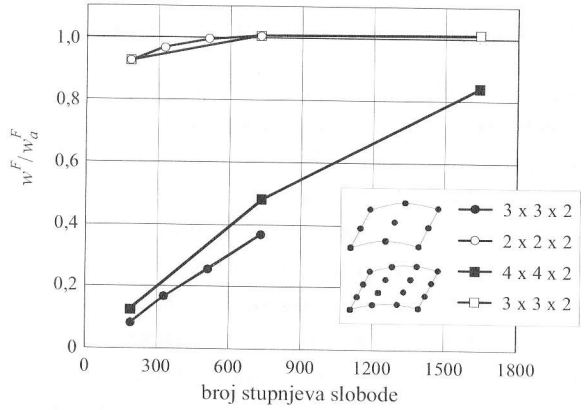
Usprkos velikom broju izvedenih konačnih elemenata, još uvijek je teško naći element koji može točno opisati deformiranje proizvoljnih ljuskastih oblika uz proizvoljno opterećenje i proizvoljne rubne uvjete. Opsežan pregled elemenata za analizu ljuskastih konstrukcija može se naći u radovima [126, 127]. Najveći je broj elemenata izveden iz trodimenzijskih elemenata primjenom postupka degeneriranja. Tome je razlog njihova mnogo jednostavnija formulacija, koja se temelji na osnovnim relacijama mehanike kontinuuma, u usporedbi s elementima čija je formulacija temeljena na znatno složenijim teorijama ljusaka.

Konvergencija degeneriranih ljuskastih elemenata prikazana je u [15] na primjeru tankostjene cilindrične ljuske. Oblik ljuske i način opterećenja jednak je kao na slici 18.14. Debljina ljuske je $h = 25,4\,\text{mm}$, a omjer polumjera i debljine stijenke je $R/h = 100$, te duljine i polumjera $L/R = 2$. Materijalne konstante su $E = 206,85\,\text{GPa}$ i $\nu = 0,3$. Za razliku od prethodnog primjera, tu je rub cilindrične ljuske zatvoren tzv. krutom dijafragmom. Naime, samo je osni pomak slobodan, a ostali stupnjevi slobode jednaki su nuli. Kao i na slici 18.14., diskretizirana je samo jedna osmina ljuske, uz rubne uvjete koji odgovaraju simetriji konstrukcije. Na temelju podataka iz [15], na slikama 18.22. i 18.23. prikazan je omjer numeričkog i analitičkog rješenja za vertikalni pomak na mjestu djelovanja koncentrirane sile, w^F / w_a^F, ovisno o broju stupnjeva slobode proračunskog modela. Numerička rješenja dobivena su pomoću degeneriranih serendipity i

Lagrangeovih ljuskastih elemenata, primjenom pune i reducirane integracije. Razmatrani su serendipity elementi s 8 i 12 čvorova i Lagrangeovi elementi s 9 i 16 čvorova. Za serendipity element s 8 čvorova i Lagrangeov element s 9 čvorova, red pune integracije je 3x3x2, pri čemu integracija 3x3 označuje broj točaka po srednjoj plohi elementa, a 2 pokazuje broj točaka po debljini elementa. Za te elemente je primijenjena reducirana integracija reda 2x2x2. Za serendipity i Lagrangeove elemente višeg reda s 12 i 16 čvorova, red pune integracije je 4x4x2, a reducirana je integracija 3x3x2. Približavanje točnim vrijednostima rješenja dobivenog pomoću serendipity elemenata prikazano je na slici 18.22., a konvergencija rješenja pomoću Lagrangeovih elemenata na slici je 18.23. Kao što se i očekivalo, znatno bolju konvergenciju pokazuju konačni elementi uz primjenu reducirane integracije.



Slika 18.22. Konvergencija rješenja dobivenih pomoću ljuskastih serendipity elemenata



Slika 18.23. Konvergencija rješenja dobivenih pomoću ljuskastih Lagrangeovih elemenata

19. O OSTALIM FORMULACIJAMA METODE KONAČNIH ELEMENATA

U prethodnim poglavljima prikazani su konačni elementi temeljeni na metodi pomaka, koji se izvode iz varijacijskog principa minimuma ukupne potencijalne energije ili principa virtualnih pomaka. Neovisne varijable su pomaci iz kojih se izvode ostale veličine potrebne za procjenu stanja deformacije i naprezanja. Najčešće su to unutarnje sile, momenti i naprezanja, a izračunavaju se derivacijom pomaka. Pritom se greška nastala pri pomaku znatno povećava, što je jedan od nedostataka metode pomaka. Osim toga, često se pojavljuju poteškoće pri zadovoljavanju potrebnih uvjeta kompatibilnosti, što osobito dolazi do izražaja u konačnim elementima za analizu ploča i ljusaka. Može se pojaviti nepoželjan "locking efekt" koji može u velikoj mjeri ugroziti konvergenciju rješenja.

Svi spomenuti nedostaci metode pomaka naveli su na potrebu pronalaženja drugih formulacija. Predložene su mješovita i hibridna formulacija, koje za odgovarajuće grupe problema pokazuju znatne prednosti u odnosu na metodu pomaka. Neke od navedenih neželjenih pojava moguće je ublažiti ili potpuno otkloniti. Moguće je zadovoljiti potrebne uvjete kompatibilnosti duž rubova elemenata s funkcijama nižeg reda nego u metodi pomaka. Unutarnje sile i naprezanja mogu biti nepoznate čvorne veličine u jednadžbi konačnih elementa. "Locking efekt" je moguće eliminirati pomoću odgovarajućih interpolacijskih funkcija za komponente deformacije.

Mješovita formulacija konačnih elemenata izvodi se iz proširenih varijacijskih principa, kao što su Hu-Washizuov i Hellinger-Reissnerov varijacijski princip, koji su opisani u odjeljku 4.6. Pritom neovisne varijable, osim pomaka, istodobno mogu biti deformacija i naprezanje, odnosno unutarnje sile i momenti, a opisuju se interpolacijskim funkcijama za cijelo područje elementa. Povećava se broj nepoznatih veličina u čvorovima, a matrica konačnog elementa složenija je nego u metodi pomaka.

Za razliku od mješovite formulacije koja se temelji na proširenim varijacijskim principima, gdje se interpolacijske funkcije odnose na cijelo područje elementa,

hibridna formulacija temeljena je na principima minimuma potencijalne ili njezine komplementarne energije, s međusobno neovisnim interpolacijskim funkcijama koje se odnose na područje unutar i duž rubova elementa. Obično je polje fizikalne veličine unutar elementa prikazano kao funkcija poopćenih parametara, a veličine duž rubova opisane su kao funkcije njihovih čvornih vrijednosti. Nakon eliminiranja poopćenih parametara, izvodi se jednadžba konačnog elementa s nepoznatim čvornim vrijednostima. Razlikuje se hibridna metoda pomaka, mješovita hibridna metoda i hibridna metoda sila.

Hibridna metoda pomaka i mješovita hibridna metoda izvode se iz principa minimuma ukupne potencijalne energije. U hibridnoj metodi pomaka polje pomaka unutar elementa prikazuje se kao funkcija poopćenih parametara pretpostavljene interpolacijske funkcije, a duž rubova se zadaje raspodjela naprezanja ovisno o njihovim čvornim veličinama. U mješovitoj hibridnoj metodi pomaci unutar elementa i naprezanja duž rubova opisuju se pomoću poopćenih parametara, a neovisno o tome raspodjela pomaka duž rubova opisuje se kao funkcija pomaka u čvorovima. Hibridna metoda sila izvodi se iz principa minimuma komplementarne potencijalne energije, pri čemu se unutar elementa opisuje raspodjela naprezanja, a raspodjela pomaka duž rubova opisuje se interpolacijskim funkcijama ovisno o čvornim pomacima.

Svrha ovoga poglavlja je prikazati osnovnu ideju mješovite i hibridne formulacije. Polazeći od Hellinnger-Reissnerova varijacijskog principa, izvest će se mješovita jednadžba konačnog elementa s pomacima i naprezanjima kao nepoznatim čvornim veličinama, te će se dati kratki prikaz hibridne metode sila. Više o mješovitim i hibridnim formulacijama može se naći u [14,46,118].

19.1. Mješovita formulacija

Kao što je prethodno spomenuto, jednadžba konačnog elementa ovdje se izvodi iz Hellinnger-Reissnerova varijacijskog principa. Hellinnger-Reissnerov funkcional, uz pretpostavku da su rubni uvjeti pomaka u potpunosti zadovoljeni, prema (4.48) jednak je

$$\Pi_{HR} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{Sq} \mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S\,. \tag{19.1}$$

Nakon provedbe varijacije po naprezanju i pomacima, iz uvjeta stacionarnosti $\delta \Pi_{HR} = 0$ dobiva se za područje konačnog elementa

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}_k \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{Sq} \delta\mathbf{u}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S = 0\,. \tag{19.2}$$

Raspodjela pomaka u elementu opisana je na poznati način pomoću funkcija oblika, $\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{v}$, a pomaci duž rubova elementa jednaki su $\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_u \mathbf{N}\,\mathbf{v} = \mathbf{N}_S \mathbf{v}$. Raspodjela naprezanja opisana je analogno pomacima, pomoću interpolacijskih funkcija i veličina u čvorovima, na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}}\,, \tag{19.3}$$

gdje je $\mathbf{N}_\sigma$ matrica funkcija oblika za naprezanje, a $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ je vektor čiji su članovi naprezanja u čvorovima konačnog elementa. Nakon provedbe varijacije, dobiva se

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\,\delta\mathbf{v}\,, \\ \delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{N}_\sigma\,\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,, \\ \delta\mathbf{u}_S &= \mathbf{N}_S\,\delta\mathbf{v}\,. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Pomoću (19.4), izraz (19.2) može se transformirati u oblik

$$\begin{aligned} &\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \left[\int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \,\mathrm{d}V\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \left[\int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}\,\mathrm{d}V\right]\mathbf{v} - \delta\mathbf{v}^T \left[\int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}\,\mathrm{d}V\right]^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \\ &+ \delta\mathbf{v}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \delta\mathbf{v}^T \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{19.5}$$

Uvođenjem novih oznaka

$$\mathbf{k}_{\sigma\sigma} = -\int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \,\mathrm{d}V\,, \tag{19.6}$$

$$\mathbf{k}_{\sigma u} = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}\,\mathrm{d}V\,, \tag{19.7}$$

$$\mathbf{r} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q}\,\mathrm{d}V + \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b\,\mathrm{d}S\,, \tag{19.8}$$

relacija (19.5) postaje

$$\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \left(\mathbf{k}_{\sigma\sigma}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{k}_{\sigma u}\mathbf{v}\right) + \delta\mathbf{v}^T \left(\mathbf{k}_{\sigma u}^T\,\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{r}\right) = 0\,. \tag{19.9}$$

Budući da relacija (19.9) mora biti ispunjena za bilo koju vrijednost $\delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ i $\delta\mathbf{v}$, proizlaze sljedeće dvije jednadžbe:

$$\mathbf{k}_{\sigma\sigma}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{k}_{\sigma u}\mathbf{v} = 0\,, \tag{19.10}$$

$$\mathbf{k}_{\sigma u}^{T}\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{r}=0\,, \tag{19.11}$$

koje se mogu zajedno napisati u obliku

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{\sigma\sigma} & \mathbf{k}_{\sigma u}\\ \mathbf{k}_{\sigma u}^{T} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{r}\end{bmatrix}. \tag{19.12}$$

Relacija (19.12) mješovita je jednadžba konačnog elementa, gdje su nepoznate veličine u čvorovima osim pomaka i naprezanja. Prikladnim izborom funkcija oblika za naprezanje, moguće je izbjeći pojavu "locking efekta" koja je česta kod elemenata za analizu tankostjenih ploča i ljusaka. Pritom treba voditi računa da su nulte vrijednosti energije deformiranja pridružene samo pomacima elementa kao krutog tijela. Drugim riječima, ne smiju se pojaviti nepoželjni tzv. "zero-energy-modes". Budući da se pri pomaku krutog tijela ne smiju pojaviti deformacije, broj neovisnih deformacijskih oblika m mora biti jednak broju stupnjeva slobode elementa n umanjen za broj stupnjeva slobode gibanja krutog tijela s. Prema tome, izraz za funkciju naprezanja mora sadržavati $m=n-s$ članova.

Iz sustava jednadžbi (19.12) mogu se eksplicitno prikazati naprezanja u čvorovima elementa ovisno o pomacima $\mathbf{v}$, pomoću relacije

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=-\mathbf{k}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{k}_{\sigma u}\mathbf{v}\,, \tag{19.13}$$

koja uključuje kinematičku relaciju $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}_k\mathbf{u}$, koja je sadržana u funkcionalu (19.1). Točnost opisivanja te kinematičke relacije ovisi o funkciji oblika za naprezanje $\mathbf{N}_\sigma$. Uvrštavanjem (19.13) u (19.11), dobiva se jednadžba krutosti konačnog elementa

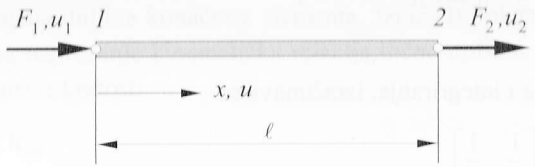
$$-\mathbf{k}_{\sigma u}^{T}\mathbf{k}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{k}_{\sigma u}\mathbf{v}=\mathbf{r} \tag{19.14}$$

iz koje slijedi izraz za matricu krutosti

$$\mathbf{k}=-\mathbf{k}_{\sigma u}^{T}\mathbf{k}_{\sigma\sigma}^{-1}\mathbf{k}_{\sigma u}\,. \tag{19.15}$$

Ako su interpolacijske funkcije tako odabrane da je kinematička relacija točno opisana, pomoću (19.15) izračunava se ista matrica krutosti kao i za metodu pomaka. U svrhu boljeg razumijevanja mješovite formulacije, u sljedećem se primjeru izvodi mješovita jednadžba osnovnoga štapnog elementa.

Primjer 19.1. Potrebno je prikazati mješovitu formulaciju za osnovni štapni element s dva čvora, prema slici P19.1.



Slika P19.1. Osnovni štapni element

U skladu s formulacijom metode pomaka za element s dva stupnja slobode, matrica funkcija oblika za pomake prema (6.19) jednaka je

$$\mathbf{N} = \left[1 - \frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell} \right]. \tag{a}$$

Deriviranjem funkcija oblika kao što je opisano u odjeljku 6.1., izvodi se matrica **B**

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell} \right]. \tag{b}$$

Budući da je u slučaju jednodimenzijskog elementa s dva pomaka u čvorovima $n = 2$, a samo je jedan pomak krutog tijela, $s = 1$, na temelju gore spomenute relacije, $m = n - s$, polje naprezanja u elementu moguće je opisati samo s jednim konstantnim članom, što odgovara stvarnoj fizikalnoj slici konstantnih deformacija i naprezanja. Ovdje će se pretpostaviti, jednako kao i kod pomaka, linearna raspodjela naprezanja, pa je matrica funkcija oblika za naprezanje jednaka

$$\mathbf{N}_\sigma = \left[1 - \frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell} \right]. \tag{c}$$

Kao što je prikazano u odjeljku 3.4.1., naprezanje se opisuje uzdužnom silom, $\boldsymbol{\sigma} = \left[N(x) \right]$, a veličine u čvorovima jednake su

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \left[F_1 \quad F_2 \right], \tag{d}$$

gdje su F_1 i F_2 sile u čvorovima. Za jednodimenzijski element, izraz (19.6) za $\mathbf{k}_{\sigma\sigma}$ transformira se u oblik

$$\mathbf{k}_{\sigma\sigma} = -\int_\ell \mathbf{N}_\sigma^T \, \mathbf{D}^{-1} \, \mathbf{N}_\sigma \, dx, \tag{e}$$

gdje je matrica elastičnosti $\mathbf{D} = \left[EA \right]$. Uvrštavanjem matrica $\mathbf{N}_\sigma$ i **D**, dobiva se

$$\mathbf{k}_{\sigma\sigma} = -\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x}{\ell} \\ \dfrac{x}{\ell} \end{bmatrix} \left[\frac{1}{EA}\right] \left[1-\frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell}\right] \mathrm{d}x \,. \tag{f}$$

Nakon množenja i integriranja, izračunava se

$$\mathbf{k}_{\sigma\sigma} = -\frac{\ell}{EA} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}. \tag{g}$$

Analogno se izračunava matrica $\mathbf{k}_{\sigma u}$

$$\mathbf{k}_{\sigma u} = -\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} 1-\dfrac{x}{\ell} \\ \dfrac{x}{\ell} \end{bmatrix} \left[-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell}\right] \mathrm{d}x \,, \tag{h}$$

$$\mathbf{k}_{\sigma u} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{i}$$

Budući da su volumenske sile i kontinuirano opterećenje jednaki nuli, vektor $\mathbf{r}$ u relaciji (19.12) opisan je koncentriranim silama u čvorovima

$$\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}. \tag{j}$$

Uvrštavanjem (g), (i) i (j) u (19.12), dobiva se jednadžba konačnog elementa u obliku

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\ell}{3EA} & -\dfrac{\ell}{6EA} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\ell}{6EA} & -\dfrac{\ell}{3EA} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \tag{k}$$

Lako je provjeriti da se pomoću relacija (19.3) i (19.13) dobiva točna veza između uzdužne sile i pomaka

$$N = \frac{EA}{\ell}(-u_1 + u_2) = EA\frac{\Delta\ell}{\ell}, \tag{l}$$

gdje je $\Delta\ell$ promjena duljine konačnog elementa. Izraz (l) pokazuje da je pomoću funkcija oblika za naprezanje kinematička relacija točno opisana, što će potvrditi i izračunavanje matrice krutosti

$\mathbf{k} = -\mathbf{k}_{\sigma u}^T \mathbf{k}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{k}_{\sigma u}$:

$$\mathbf{k} = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{l}{3EA} & -\frac{l}{6EA} \\ -\frac{l}{6EA} & -\frac{l}{3EA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{m}$$

Nakon transponiranja prve i invertiranja srednje matrice i množenja, dobiva se sljedeća matrica:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{n}$$

koja je u potpunosti jednaka matricama koje su izračunate u 6. i 12. poglavlju primjenom metode pomaka.

19.2. Hibridna metoda sila

Kao što je već rečeno, hibridna metoda sila temeljena je na principu minimuma komplementarne potencijalne energije koji je opisan u odjeljku 4.5. Polazeći od toga varijacijskog principa, izvodi se matrica krutosti konačnog elementa. Pritom funkcija naprezanja za područje elementa mora biti tako odabrana da su uvjeti ravnoteže u potpunosti zadovoljeni, a zadana funkcija pomaka duž rubova elementa mora zadovoljavati potrebne uvjete kompatibilnosti. Hibridna metoda sila vrlo često se primjenjuje u formulaciji konačnih elemenata za rješavanje problema pločastih i ljuskastih konstrukcija, kao i posebnih konačnih elemenata za rješavanje problema mehanike loma.

Komplementarna potencijalna energija, prema formulaciji u odjeljku 4.5., jednaka je

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}V - \int_{S_u} \mathbf{q}_S^T \mathbf{u}_b\, \mathrm{d}S. \tag{19.16}$$

Budući da u varijacijskom principu $\delta\Pi^* = 0$ nisu implicitno uključeni uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila, potrebno ih je zadovoljiti kao dodatne uvjete

$$\mathbf{D}_c\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q} = 0 \quad \in V, \tag{19.17}$$

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma} \quad \in S_q . \tag{19.18}$$

Polje naprezanja opisuje se pomoću interpolacijskih polinoma koji se prikazuju kao umnožak odgovarajućih funkcija koje su sadržane u matrici $\mathbf{P}_\sigma$ i poopćenih parametara koji čine vektor $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\beta} . \tag{19.19}$$

Pomaci duž ruba elementa, u skladu s opisanom formulacijom metode pomaka, jednaki su $\mathbf{u}_S = \mathbf{N}_S\mathbf{v}$. Budući da je za zadane pomake $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_S$, vrijedi relacija

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{N}_S\mathbf{v} . \tag{19.20}$$

Sile $\mathbf{q}_S$ duž ruba također se prikazuju kao funkcija poopćenih parametara, na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_S = \mathbf{R}_q\boldsymbol{\sigma} \\ &\qquad\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_\sigma\boldsymbol{\beta} \\ &\mathbf{q}_S = \mathbf{R}_q\mathbf{P}_\sigma\boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \tag{19.21}$$

Ako su za sile duž ruba zadane vrijednosti $\mathbf{q}_b$, vrijedi $\mathbf{q}_b = \mathbf{q}_S$, pa je njihova varijacija jednaka nuli, tj. $\delta\mathbf{q}_b = 0$. Uvođenjem supstitucije $\mathbf{P}_q = \mathbf{R}_q\mathbf{P}_\sigma$, veza je između rubnih sila i poopćenih parametara jednaka

$$\mathbf{q}_S = \mathbf{P}_q\boldsymbol{\beta} . \tag{19.22}$$

Nakon uvrštavanja (19.19), (19.20) i (19.22), izraz za komplementarnu potencijalnu energiju (19.16) može se napisati u obliku

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\left[\int_V \mathbf{P}_\sigma^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}_\sigma \, dV\right]\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T\left[\int_{S_u} \mathbf{P}_q^T\mathbf{N}_S \, dS\right]\mathbf{v} . \tag{19.23}$$

Uz supstitucije

$$\mathbf{E} = \int_V \mathbf{P}_\sigma^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}_\sigma \, dV \tag{19.24}$$

$$\mathbf{G} = \int_{Su} \mathbf{P}_q^T\mathbf{N}_S \, dS , \tag{19.25}$$

izraz (19.23) postaje

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{E}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}\,\mathbf{v}\,. \tag{19.26}$$

Nakon provedbe varijacije po poopćenim parametrima $\boldsymbol{\beta}$, iz uvjeta stacionarnosti $\delta\Pi^* = 0$ dobiva se

$$\delta\boldsymbol{\beta}^T \left(\mathbf{E}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{G}\,\mathbf{v}\right) = 0\,. \tag{19.27}$$

Budući da relacija (19.27) mora biti zadovoljena za svaki $\delta\boldsymbol{\beta}$, dobiva se sljedeća veza između vektora poopćenih parametara i vektora pomaka u čvorovima konačnog elementa

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}\,\mathbf{v}\,. \tag{19.28}$$

Uvrštavanjem (19.28) u (19.26), izraz za komplementarnu potencijalnu energiju postaje

$$\Pi^* = -\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{G}^T \mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{k}\,\mathbf{v}\,. \tag{19.29}$$

Na taj se način dobiva željeni izraz za matricu krutosti konačnog elementa u obliku

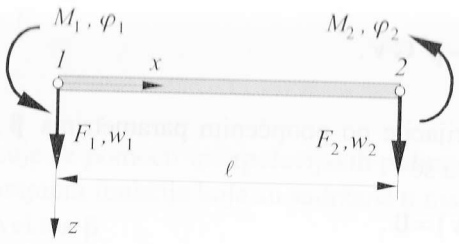
$$\mathbf{k} = \mathbf{G}^T \mathbf{E}^{-1}\mathbf{G}\,. \tag{19.30}$$

Zbog boljega razumijevanja opisane formulacije, u sljedećem primjeru prikazat će se izvod matrice krutosti za osnovni gredni element koji je već razmatran u okviru metode pomaka.

Primjer 19.2. Potrebno je pomoću hibridne metode sila izvesti matricu krutosti za osnovni gredni element prema slici P19.2.

Kao što je već prikazano u odjeljku 3.4.3., vektor naprezanja opisan je momentom savijanja. Za gredni element prema slici P19.2., moment savijanja je oko osi y, pa je duž grede potrebno opisati raspodjelu momenta $M_y = M_y(x)$. Ovdje će se zbog jednostavnosti indeks y ispustiti. Na taj je način vektor naprezanja

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[M(x)\right]. \tag{a}$$



Slika P19.2. Osnovni gredni element

Duž elementa se pretpostavlja linearna raspodjela momenta savijanja

$$M(x) = \beta_1 + \beta_2 x\,, \tag{b}$$

što je u matričnom obliku jednako

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\sigma \boldsymbol{\beta}\,. \tag{c}$$

Iz ove relacije slijede izrazi za $\mathbf{P}_\sigma$ i vektor poopćenih parametara $\boldsymbol{\beta}$

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}, \tag{d}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}. \tag{e}$$

Nije teško provjeriti da izraz (b) zadovoljava uvjet ravnoteže prema relaciji (3.75).

Za prikazani gredni element, vektor $\mathbf{q}_s$ jednak je

$$\mathbf{q}_s^T = \begin{bmatrix} F_1 & M_1 & F_2 & M_2 \end{bmatrix}. \tag{f}$$

Njegovi članovi određuju se pomoću rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} -M_1 &= M_y(x=0)\,, \\ -F_1 &= Q_z(x=0)\,, \\ M_2 &= M_y(x=\ell)\,, \\ F_2 &= Q_z(x=\ell)\,, \end{aligned} \tag{g}$$

koje je, koristeći se relacijom (3.73), moguće prikazati u obliku

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}. \tag{h}$$

Iz (h) slijedi izraz za matricu $\mathbf{P}_q$

$$\mathbf{P}_q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & \ell \end{bmatrix}. \tag{i}$$

Rubni pomaci jednaki su stupnjevima slobode u čvorovima

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \tag{j}$$

pa je na temelju relacije (19.20) matrica $\mathbf{N}_S$ jednaka jediničnoj matrici. Prema (3.77) matrica elastičnosti je

$$\mathbf{D} = [EI]. \tag{k}$$

Za jednodimenzijski konačni element, izraz za matricu $\mathbf{E}$ jednak je

$$\mathbf{E} = \int_\ell \mathbf{P}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}_\sigma \, \mathrm{d}x. \tag{l}$$

Uvrštavanjem (d) i (k) u relaciju (l), dobiva se

$$\mathbf{E} = \int_0^\ell \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{EI} \end{bmatrix} [1 \quad x] \mathrm{d}x. \tag{m}$$

Nakon množenja i integriranja, izračunava se

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{3EI} \end{bmatrix}. \tag{n}$$

Budući da je matrica $\mathbf{P}_q$ konstantna, a $\mathbf{N}_S$ je jedinična matrica, na temelju (19.25) vrijedi

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_q^T \,. \tag{o}$$

Na taj je način prema (i), matrica **G** jednaka

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ell \end{bmatrix}. \tag{p}$$

Uvrštavanjem (n) i (p) u izraz (19.30), dobiva se

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ell \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\ell}{EI} & \dfrac{\ell^2}{2EI} \\ \dfrac{\ell^2}{2EI} & \dfrac{\ell^3}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ell \end{bmatrix}, \tag{r}$$

nakon čega se izračunava sljedeća matrica:

$$\mathbf{k} = EI \begin{bmatrix} \dfrac{12}{\ell^3} & -\dfrac{6}{\ell^2} & -\dfrac{12}{\ell^3} & -\dfrac{6}{\ell^2} \\ -\dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{4}{\ell} & \dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} \\ -\dfrac{12}{\ell^3} & \dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{12}{\ell^3} & \dfrac{6}{\ell^2} \\ -\dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{2}{\ell} & \dfrac{6}{\ell^2} & \dfrac{4}{\ell} \end{bmatrix}, \tag{s}$$

koja je jednaka matrici krutosti (12.38) koja je izvedena primjenom metode pomaka.

LITERATURA

[1] ABAQUS, Superior Finite Element Analysis Solutions, web stranica: www.abaqus.com/solutions.

[2] Ahmad, S., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C., Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng. 2, (1970) 419-451.

[3] Alfirević, I., Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb 1995.

[4] Alfirević, I., Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb 1998.

[5] Alfirević, I., Nauka o čvrstoći II, Golden marketing, Zagreb 1999.

[6] Alfirević, I., Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, Zagreb 2003.

[7] Argyris, J., Mlejnek, H.-P., Die Methode der finiten Elemente, Band I, Wieweg, Braunschweig 1986.

[8] Argyris, J., Mlejnek, H.-P., Die Methode der finiten Elemente, Band II, Wieweg, Braunschweig 1987.

[9] Argyris, J., Scharpf, D. W., The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method, Aeron. J. Roy. Aeron. Soc. 72, (1968), 873-883.

[10] Ahrens, H., Dinkler, D., Finite-Element-Methoden, Teil I, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Braunschweig 1990.

[11] Ahrens, H., Dinkler, D., Finite-Element-Methoden, Teil II, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Braunschweig 1991.

[12] Basar, Y., Krätzig, W. B., Mechanik der Flächentragwerke, Vieweg, Braunschweig 1985.

[13] Bathe, K.-J., Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[14] Bathe, K.-J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1996.

[15] Bathe, K.-J., Bolourchi, S., A geometric and material nonlinear plate and shell element, Computers & Structures 11 (1980) 23-48.

[16] Bathe, K.-J., Chapelle, D., Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, Computers & Structures 66 (1998) 19-36.

[17] Bathe, K.-J., Lee, N-S., Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements, Int. J. Num. Meth. Eng. 36 (1993) 3553-3576.

[18] Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., Zienkewicz, O. C., Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. on